Technische Universität Dresden
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
Fachrichtung Mathematik

Institut für Algebra

Kumulierte Klauseln als aussagenlogische Sprachmittel für die Formale Begriffsanalyse

Diplomarbeit
zur Erlangung des ersten akademischen Grades
Diplommathematiker

vorgelegt von

Rüdiger Krauße
geb. am 26. 1. 1974
in Riesa

Tag der Einreichung: 13. 7. 98
Betreuer: Prof. Bernhard Ganter

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Merkmalsexploration der Formalen Begriffsanalyse [GW96] ist ein relativ weit verbreitetes Verfahren, um Regelwissen aus Datenmengen zu extrahieren. Man hat dabei eine Menge von Merkmalen M sowie eine Datenmenge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und ermittelt in der Regel eine Basis von Implikationen über M, die $\mathfrak{G}$ beschreiben. Ein Problem, auf das man dabei immer wieder stößt, ist der Umstand, daß man es hier stets mit Hüllensystemen von Merkmalsmengen zu tun hat. Bestimmte Informationen, insbesondere die Negation von Merkmalen, können dabei nicht oder nur unzureichend erfaßt werden. An der Technischen Universität gab es bereits 1995 Bemühungen, Klauseln als Hintergrundinformationen mit in die Exploration einzubeziehen. Als Ergebnis entstand das Computerprogramm IMPEX [I95], das tatsächlich eine verbesserte Merkmalsexploration ermöglichte.

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, den mathematischen Hintergrund dieses Programms in einer allgemeineren Fassung aufzuarbeiten, in dem als Grundterme kumulierte Klauseln verwendet werden. Dabei handelt es sich um aussagenlogische Terme der Form $\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B$, wobei $A \subseteq M$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Diese kumulierten Klauseln sind somit eine Verallgemeinerung von Klauseln ($\bigwedge A \to \bigvee B$) und Implikationen ($\bigwedge A \to \bigwedge B$). In den einzelnen Abschnitten wird dann schrittweise eine mathematische Theorie für die kumulierten Klauseln entwickelt.

Für Mengen kumulierter Klauseln hat man die üblichen aussagenlogischen Begriffe, z.B. Theorie, Modellklasse, Abgeschlossenheit usw. Diese werden im zweiten Abschnitt noch einmal erläutert und für den Spezialfall der kumulierten Klauseln charakterisiert.

Im dritten Abschnitt wird die Abgeschlossenkeit von Mengen $\mathcal{L}$ von kumulierten Klauseln auf syntaktischem Wege durch vier Interferenzregeln charakterisiert. Man hat damit einen syntaktischen Ableitungsbegriff.

Mit Hilfe der Modellklassen wird im Abschnitt 4 eine Ordnungsrelation auf den kumulierten Klauseln definiert. Unter Verwendung dieser Relation ist es möglich, Mengen von kumulierten Klauseln zu verkleinern, ohne daß sich die zugehörige Modellklasse ändert. Im zweiten Teil wird die Ordnungsrelation dazu verwendet, spezielle erzeugende Mengen von Theorien zu konstruieren.

Im Abschnitt 5 werden die beiden Operatoren $\mathfrak{G}(.)$ und $\mathcal{L}(.)$ eingeführt. Und zwar liefern diese zu einem $X \subseteq M$ die minimalen Teilmengen bzw. Modelle, die X enthalten, vergleichbar mit dem Hüllenoperator bei Hüllensystemen und Implikationen, siehe [GW96, S.80]. Wir werden in den folgenden Abschnitten stark von ihnen Gebrauch machen. Die Hilfssätze dieses Abschnitts charakterisieren diese Operatoren.

Der Abschnitt 6 befaßt sich mit der Frage, wie zu einer Menge $\mathcal{L} \in \mathrm{KK}(M)$ die Modellklasse $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ ermittelt werden kann. Es wird dazu ein Algorithmus angegeben.

Im siebenten Abschnitt wird die Frage beantwortet, wie „Basen“ für Mengen von kumulierten Klauseln aussehen können. Der hier verwendete Ansatz liefert allerdings nur nichtredundante Mengen $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ und keine minimalen Erzeugendensysteme.

Im Abschnitt 8 wird ein Verfahren vorgestellt, wie ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ ermittelt werden kann, nämlich $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$.

Die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ aus $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ kann unter Umständen recht aufwendig sein. Deshalb betrachten wir in Abschnitt 9 erzeugende Mengen von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$, für die diese Berechnung relativ einfach ist. In Anlehnung an [W89] verwenden wir dazu den Begriff „transitivitätsvermeidend". Solche Mengen erlauben die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ in Linearzeit.

Im Abschnitt 10 befassen wir uns mit Mengensystemen $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, bei denen bereits das Auftreten von Merkmalen einer festen Menge $M_E \subseteq M$ auf die restlichen Merkmale schließen läßt. In der Praxis sind diese restlichen ableitbaren Merkmale dann auch meist als aussagenlogische Terme über den anderen Merkmalen gegeben. Diese Arbeit reißt diese Thematik allerdings kurz an und zeigt die Verbindung zu den kumulierten Klauseln. Der erste Teil dieses Abschnitts befaßt sich damit, welche Mengen kumulierter Klauseln solche Merkmale ausreichend charakterisieren. Im zweiten Teil wird dann angegeben, wie man solche ausreichenden Mengen konstruieren kann, und zwar für die Fälle, daß die ableitbaren Merkmale über Mengen oder aussagenlogische Terme definiert sind. Der letzte Teil erörtert Möglichkeiten, Theorien über einzelnen Teilmengen der Merkmalsmenge M zu ermitteln.

Der elfte Abschnitt befaßt sich mit dem Speziallfall der kumulierten Klauseln, daß es höchstens eine Konklusionsmenge gibt. Wir sprechen dann von kumulierten Hornklauseln. Die Ableitung solcher kumulierter Hornklauseln aus Mengen von kumulierten Klauseln ist besonders einfach. Außerdem geben wir einen Basissatz, der besagt, daß $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ für Mengen kumulierter Klauseln minimal ist.

Mitunter interessiert man sich nur für die kumulierten Hornklauseln, die aus einer Menge von kumulierten Klauseln folgen. Dazu führen wir in Abschnitt 12 einen weiteren syntaktischen Ableitungsbegriff ein. Anschließend zeigen wir, wie man ein Erzeugendensystem für die kumulierten Hornklauseln einer Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ finden kann.

Im 13. Abschnitt werden noch einmal die wichtigsten Algorithmen der vorangegangenen Abschnitte in optimierter und detailierter Form vorgestellt. Dabei werden sie auch hinsichtlich ihres Aufwandes untersucht.

Unabhängig von den vorgestellten Algorithmen kann man die Berechnungen mit kumulierten Klauseln in die üblichen Komplexitätsklassen einordnen. Mit diesen Problemen befaßt sich Abschnitt 14. Es wird beispielsweise gezeigt, daß das Erfüllbarkeitsproblem für kumulierte Klauseln NP-vollständig ist. In den praktischen Anwendungen hat man es jedoch meist, wie gezeigt wird, mit polynomialen Problemen zu tun.

In Abschnitt 15 wird nun direkt die Verbindung zu den formalen Kontexten der Formalen Begriffsanalyse gezogen. Solche Kontexte eignen sich hervorragend zur Repräsentation von Teilmengen von M bzw. von Modellklassen von Mengen kumulierter Klauseln über M. Die Gegenstände $g \in G$ des Kontextes werden dabei mit ihrer Ausprägung g^I als Modelle aufgefaßt. Umgekehrt eignen sich die kumulierten Klauseln, um die inneren Abhängigkeiten der Gegenstände eines Kontextes zu untersuchen. Dazu können Kontexten beschreibende Mengen kumulierter Klauseln zugeordnet werden. Im zweiten Teil des Abschitts werden die Zusammenhänge zwischen den Kontextkonstruktionen Direkte Summe und Halbprodukt und den beschreibenden Mengen untersucht.

Zum Skalieren von mehrwertigen Kontexten werden häufig sogenannte Elementarskalen verwendet (Definitionen siehe [GW96, S.42 ff.]). Wir geben in Abschnitt 16 beispielhaft die kumulierten Klauselbasen der Gegenstandsinhalte der häufigsten dieser Skalenkontexte an.

Sei $\mathbf{P} := (P, \leq)$ eine beliebige geordnete Menge. Dann kann man unter Verwendung von $\mathbf{P}$ die verschiedensten Skalen konstruieren. Es ist allerdings ziemlich schwierig, wenn nicht gar unmöglich, allgemeine Formeln für die kumulierten Klauselbasen anzugeben, weil dabei die Struktur von $\mathbf{P}$ sehr stark mit eingeht. In Abschnitt 17 werden zumindest beschreibende Mengen für die wichtigsten dieser Standardskalen angegeben.

Im Abschnitt 18 werden an Hand eines größeren Beispiels noch einmal einige Verwendungsmöglichkeiten kumulierter Klauseln für die Formale Begriffsanalyse demonstriert. So kommen z.B. Skalierungen mit kumulierten Klauseln, ableitbare Merkmale und die Arbeit mit eingeschränkten Merkmalsmengen zu Einsatz.

2 Motivation, Grundbegriffe

In [W89] wird ein allgemeiner Ansatz für „Modelltheorien von binären Relationen“ vorgestellt, der als Basis für die Theorien der Implikationen in Hüllensystemen verwendet wird. Er soll hier noch einmal skizziert werden, wir verwenden ihn später jedoch für allgemeine Mengensysteme:

Dazu betrachte man einen willkürlich gewählten Kontext $(\mathfrak{M}, \mathcal{S}, \models)$. Die Elemente $X \in \mathfrak{M}$ heißen dann **Modelle** und die Elemente $\sigma \in \mathcal{S}$ sind die **Formeln**. Man sagt „σ **gilt** für X“ bzw. „X **respektiert** σ“, wenn $X \models \sigma$. Dies läßt sich auch auf Mengen verallgemeinern: $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ gilt in $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{M}$, wenn $X \models \sigma$ für alle $X \in \mathfrak{G}$, $\sigma \in \Sigma$.

Außerdem haben wir wie in jedem Kontext $\mathfrak{G}' := \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \forall X \in \mathfrak{G} \colon X \models \sigma\}$ und $\Sigma' := \{X \in \mathfrak{M} \mid \forall \sigma \in \Sigma \colon X \models \sigma\}$. Dann heiße $\mathrm{Th}(\mathfrak{G}) := \mathfrak{G}'$ die **Theorie** von $\mathfrak{G}$ und $\mathrm{Mod}(\Sigma) := \Sigma'$ ist die **Modellklasse** von Σ.

Eine Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{M}$ bzw. $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ heißt **abgeschlossen**, wenn sie ein Begriffsumfang bzw. Begriffsinhalt ist, d.h. $X \in \mathfrak{G}$, $\{X\} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{G}) \implies X \in \mathfrak{G}$ bzw. $\sigma \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Mod}(\Sigma) \models \{\sigma\} \implies \sigma \in \Sigma$. Daraus resultiert auch der übliche Hüllenoperator $(.)'' =: (.)^*$, der den **Abschluß** der Teilmengen $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{M}$, $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ definiert: $\mathfrak{G}^* := \mathfrak{G}'' = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$ und $\Sigma^* := \Sigma'' = \mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(\Sigma))$.

Eine Formel $\sigma \in \mathcal{S}$ ist (semantisch) **ableitbar** aus $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ (i.Z. $\Sigma \models \{\sigma\}$), wenn σ in allen X gilt, in denen Σ gilt, d.h.

$$\begin{aligned} \Sigma \models \{\sigma\} \quad &:\iff \quad \Big(\forall X \in \mathfrak{M}\colon \{X\} \models \Sigma \implies X \models \sigma\Big) \\ &\iff \quad \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(\{\sigma\}) \\ &\iff \quad \sigma \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Zwei Formelmengen $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathcal{S}$ heißen **äquivalent**, wenn $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$. Es ist dann jede Formel in Σ_2 aus Σ_1 ableitbar und umgekehrt.

Eine Menge $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{S}$ nennt man eine **erzeugende Menge** oder **Erzeugendensystem** von $\Sigma_2 \subseteq \mathcal{S}$, wenn $\Sigma_1^* = \Sigma_2$. Die Menge $\Sigma \subseteq \mathcal{S}$ heißt **nichtredundant**, wenn sie eine minimale erzeugende Menge von Σ^* ist, d.h. wenn für alle $\Sigma_0 \subsetneq \Sigma$ stets $\Sigma_0^* \neq \Sigma^*$. Σ ist auch genau dann nichtredundant, wenn kein $\sigma \in \Sigma$ aus $\Sigma \setminus \{\sigma\}$ ableitbar ist. Eine Menge Σ ist **minimal**, wenn sie eine erzeugende Menge mit minimaler Kardinalität ist, d.h. für alle $\Sigma_0 \subseteq \mathcal{S}$ mit $|\Sigma_0| < |\Sigma|$ ist $\Sigma_0^* \neq \Sigma^*$.

Wenden wir uns nun jener Instanz dieser Thematik zu, mit der sich die vorliegende Arbeit befaßt: Sei M eine beliebige Menge aussagenlogischer Variablen, deren Elemente $m \in M$ wir auch **Merkmale** nennen. Dabei sei M im folgenden stets endlich. Die Modelle seien Teilmengen von M, also $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Für die Formeln verwenden wir folgendes:

Definition 1. Eine **kumulierte Klausel** ist ein aussagenlogischer Term der Form

$$\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B, \quad \text{wobei } A \subseteq M,\ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(M).$$

$\Diamond$

Eine solche kumulierte Klausel $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B)$ gilt für eine Menge $X \subseteq M$ (also $X \models \alpha$), falls $A \not\subseteq X$ ist oder es ein $B \in \mathfrak{B}$ gibt mit $B \subseteq X$. Dabei nennt man A die **Prämisse** und $\bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B$ die **Konklusion**. Die einzelnen $B \in \mathfrak{B}$ sind die **Konklusionsmengen**.

Die konjunktive Normalform solch einer kumulierten Klausel ist

$$\bigwedge_{a \in A} \overline{a} \vee \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B\ .$$

Wenn die Konklusion die leere Disjuktion ist (also $\mathfrak{B} = \emptyset$), gibt es keine Menge $X \subseteq M$ mit $A \subseteq X$, für die die kumulierte Klausel gilt. Wir schreiben in diesem Falle $\bigwedge A \to \emptyset$ oder $\bigwedge A \to \bot$ im Gegensatz zu $\bigwedge A \to \bigwedge \emptyset$, was $\mathfrak{B} = \{\emptyset\}$ bedeutet. Diese Unterscheidung ist sehr wichtig, da eine kumulierte Klausel der letzteren Art einfach für *alle* $X \subseteq M$ gilt.

Die kumulierten Klauseln sind eine Verallgemeinerung, welche gleichermaßen **Klauseln** ($\bigwedge A \to \bigvee B$) und **Implikationen** ($\bigwedge A \to \bigwedge B$) umfaßt.

Definition 2.

$$\mathrm{KK}(M,N) := \left\{ \bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B \;\middle|\; A \subseteq M, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(N) \right\}$$

sei die **Menge der kumulierten Klauseln von M nach N**. Den Spezialfall $\mathrm{KK}(M,M)$ nennen wir kurz **kumulierte Klauseln über M** und schreiben dafür auch $\mathrm{KK}(M)$. ◊

Zu jedem Kontext $(\mathfrak{M}, \mathcal{S}, \models)$ gibt es einen isomorphen Kontext $(\mathfrak{G}, \mathcal{L}, \models)$ mit einer Menge M und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$. Ein solcher Kontext läßt sich leicht angeben, man setze z.B.:

$$\begin{aligned} M &:= \mathfrak{M} \\ \mathfrak{G} &:= \{\{X\} \mid X \in \mathfrak{M}\} \\ \mathcal{L} &:= \left\{ \alpha_\sigma := (\bigwedge \emptyset \to \bigvee\{X \in \mathfrak{M} \mid X \models \sigma\} \;\middle|\; \sigma \in \mathcal{S} \right\} \end{aligned}$$

Die Konklusionsmengen sind dabei höchstens einelementig, es handelt sich also eigentlich um Klauseln.

Beispiel 1:
Sei $\mathfrak{M} := \{g_1, g_2, g_3\}$ und $\mathcal{S} := \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ mit nebenstehendem Kontext für $\models$-Relation.
Die entsprechende Beschreibung mit Klauseln ist:

	σ_1	σ_2	σ_3
g_1	×		
g_2	×	×	
g_3			×

$$\begin{aligned} M &:= \{g_1, g_2, g_3\} \\ \mathfrak{M} &:= \{\{g_1\}, \{g_2\}, \{g_3\}\} \\ \mathcal{S} &:= \{\alpha_{\sigma_1} = (\emptyset \to g_1 \vee g_2),\ \alpha_{\sigma_2} = (\emptyset \to g_2),\ \alpha_{\sigma_3} = (\emptyset \to g_3)\} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B)$ und die zugehörige Modellklasse $\mathrm{Mod}(\alpha) = \{X \subseteq M \mid A \nsubseteq X\} \cup \bigcup_{B\in\mathfrak{B}}\{X \subseteq M \mid B \subseteq X\}$. Bezüglich der geordneten Menge $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ ist $\mathrm{Mod}(\alpha)$ also die Vereinigung von einem Ideal $(\mathfrak{P}(M) \setminus A\!\uparrow)$ und einem Filter $(\mathfrak{B}\!\uparrow)$.

Für jede kumulierte Klausel, deren Modellklasse nicht ganz $\mathfrak{P}(M)$ ist, gibt es eine äquivalente kumulierte Klausel, für die die Summe der Mächtigkeit der Prämisse und der Konklusionsmengen minimal ist, und zwar

$$\bigwedge A \to \bigvee \left\{ \bigwedge B \setminus A \;\middle|\; (B \cup A) \in \min_{\subseteq}(\{B \cup A \mid B \in \mathfrak{B}\}) \right\}.$$

Die kumulierten Klauseln ermöglichen es, aus $\mathfrak{P}(M)$ ein einzelnes Element „herauszuschneiden“: Sei für $X \subseteq M$

$$\alpha_{[X]} := (\bigwedge X \to \bigvee_{X \subsetneq B \subseteq M} \bigwedge B).$$

Dann ist $\mathrm{Mod}(\alpha_{[X]}) = \mathfrak{P}(M) \setminus \{X\}$. Somit kann mit kumulierten Klauseln jede beliebige Teilmenge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ beschrieben werden:

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Mod}(\{\alpha_{[X]} \mid X \notin \mathfrak{G}\}) \ .$$

Wenn wir im folgenden mit der Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ earbeiten, meinen wir die Menge aller kumulierten Klauseln aus $\mathrm{KK}(M)$, die von $\mathfrak{G}$ respektiert werden. Aus der obigen Bemerkung folgt daher

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{G})) \ .$$

Am Ende des Abschnitts noch einige Bemerkungen zur Notation: Für die Elemente von M werden in dieser Arbeit in der Regel Kleinbuchstaben verwendet, Teilmengen von M werden in lateinischen Großbuchstaben notiert, Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$ sind in großen Frakturlettern gesetzt. Kumulierte Klauseln werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, Mengen von kumulierten Klauseln mit kalligraphischen Großbuchstaben.

Bereits bei kleineren Beispielen fällt auf, daß die volle Schreibweise von kumulierten Klauseln eher unübersichtlich ist. Wir wollen daher bei den Beispielen eine vereinfachte und leicht veränderte Schreibweise zulassen: Statt $m_1 \wedge m_2 \wedge m_3 \wedge \ldots \wedge m_r$ schreiben wir $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_r$. Für die binäre Disjunktion verwenden wir das Zeichen | in Analogie zur BNF-Notation, wobei diese stets schwächer bindet als die Konjunktion. Die kumulierte Klausel $(\bigwedge\{a,b\} \to \bigvee_{B \in \{\{b,c\},\{c,d\}\}} \bigwedge B) = (a \wedge b \to (b \wedge c) \vee (c \wedge d))$ schreibt sich dann $(a, b \to b, c \mid c, d)$. Für die leere Konklusion verwenden wir stets $\perp$.

Diese doppelte Schreibweise mag anfänglich verwirren, macht die Beispiele jedoch deutlich übersichtlicher, wogegen bei mathematischen Betrachtungen die exakte aussagenlogische Schreibweise vorteilhafter ist.

3 Syntaktische Ableitungsregeln für kumulierte Klauseln

Im vorangegangen Abschnitt wurden die Abgeschlossenkeit von Mengen von kumulierten Klauseln und die Ableitbarkeit auf semantischem Wege definiert, d.h. über die Modelle. Es ist jedoch auch möglich, direkt aus der Menge weitere kumulierte Klauseln abzuleiten, bzw. die Abgeschlossenheit zu prüfen. Eine solche syntaktische Charakterisierung der Abgeschlossenheit durch vier Interferenzregeln, und damit einen syntaktischen Ableitungsbegriff, liefert der erste Satz. Anschließend werden noch einmal die Spezialfälle dieser Regeln betrachtet, die für Implikationen und Klauseln relevant sind.

Satz 1 *Eine Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgenden Ableitungsregeln gelten:*

(K1). Identität:
$(\bigwedge A \to \bigwedge A) \in \mathcal{L}$ *für* $A \subseteq M$.

(K2). Prämissenerweiterung:
Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, *dann* $(\bigwedge A \cup C \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ *für* $C \subseteq M$.

(K3). Konklusionserweiterung:
Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, *dann* $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B} \cup \{C\}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ *für* $C \subseteq M$.

(K4). Substitution:
Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, $D \in \mathfrak{B}$ *und*
$(\bigwedge A \cup D \to \bigvee_{C \in \mathfrak{C}} \bigwedge C) \in \mathcal{L}$,
dann $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in (\mathfrak{B} \setminus \{D\}) \cup \mathfrak{C}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$.

Beweis: Die Korrektheit der Ableitungsregeln ist leicht einzusehen. Wenn eine Menge $X \subseteq M$ die Voraussetzungen einer der Ableitungsregeln respektiert, so respektiert sie auch die abgeleitete kumulierte Klausel, d.h. die abgeleiteten kumulierten Klauseln sind in $\mathcal{L}^*$ enthalten.

Es ist nun noch die Vollständigkeit der Regeln zu zeigen:
Sei $(\bigwedge X \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{Y}} \bigwedge Y) \in \mathcal{L}^*$. Es wird nun gezeigt, daß diese kumulierte Klausel mit Hilfe der Regeln aus $\mathcal{L}$ abgeleitet werden kann. Zunächst bilden wir eine Folge von Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$

$$\{X\} =: \mathfrak{X}_0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{X}_n =: \mathfrak{X}$$

nach folgender Bildungsvorschrift: Wenn es ein $Z_i \in \mathfrak{X}_i$ gibt mit $Z_i \not\models (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, dann

$$\mathfrak{X}_{i+1} := \mathfrak{X}_i \setminus \{Z_i\} \cup \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B \cup Z_i\}\ ,$$

solange, bis $\mathfrak{X}$ respektiert $\mathcal{L}$. Diese Bildungsvorschrift ist nicht deterministisch, der Algorithmus terminiert aber, denn kein $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{P}(M)$ kann in dieser Folge mehrmals vorkommen, wie man folgendermaßen sieht: Angenommen, es gäbe zwei Mengen $\mathfrak{X}_m = \mathfrak{X}_n$ mit $m < n$. Dann betrachten wir den Übergang von $\mathfrak{X}_i$ nach $\mathfrak{X}_{i+1}$ und das dabei verwendete Z_i. Offenbar gilt:

1. $Z_i \in \mathfrak{X}_i$, $Z_i \notin \mathfrak{X}_{i+1}$
2. Für $Y \in \mathfrak{X}_{i+1} \setminus \mathfrak{X}_i$ ist $Z_i \subsetneq Y$.

Sei nun $Z \in \min_{\subseteq}\{Z_i \mid i = m \ldots n-1\}$ ein minimales Z_i, das bei den Übergängen von $\mathfrak{X}_m$ nach $\mathfrak{X}_n$ verwendet wird. Dann ist $Z \in \mathfrak{X}_m$ und $Z \notin \mathfrak{X}_n$, also Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{X}_m = \mathfrak{X}_n$. Somit kommt in der Folge $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ jede Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$ höchstens einmal vor, also terminiert das Verfahren, denn $\mathfrak{P}(M)$ ist endlich, da M endlich.

Mit Hilfe der Ableitungsregeln läßt sich nun $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}} \bigwedge U$ ableiten, und zwar zeigt man dies induktiv über die Zwischenschritte $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}_i} \bigwedge U$.
Induktionsanfang: $(\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}_0} \bigwedge U) = (X \to X)$ gilt nach Regel (1).
Induktionsschritt: $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}_i} \bigwedge U$ kann abgeleitet werden. Der Übergang von $\mathfrak{X}_i$ zu $\mathfrak{X}_{i+1}$ erfolgte über $\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B$ mit $Z_i \in \mathfrak{X}_i$ durch $\mathfrak{X}_{i+1} := \mathfrak{X}_i \setminus \{Z_i\} \cup \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B \cup Z_i\}$. Da Z_i diese kumulierte Klausel nicht respektiert, gilt $A \subseteq Z_i$. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
\bigwedge Z_i \to \bigvee\limits_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B & \text{(nach (K2))} \\
\bigwedge B \cup Z_i \to \bigwedge B \cup Z_i & \text{(nach (K1))} \\
\bigwedge Z_i \to \bigvee\limits_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge (B \cup Z_i) & \text{(}|\mathfrak{B}|\text{ mal (K4))} \\
\bigwedge X \to \bigvee\limits_{U \in \mathfrak{X}_i} \bigwedge U & \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
\bigwedge X \to \bigvee\limits_{U \in \mathfrak{X}_i \setminus \{Z_i\}} \bigwedge U \vee \bigvee\limits_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge (B \cup Z_i) & \text{(nach (K4))} \\
\bigwedge X \to \bigvee\limits_{U \in \mathfrak{X}_{i+1}} \bigwedge U & \text{(nach Definition von } \mathfrak{X}_{i+1}\text{)}
\end{array}$$

Also läßt sich $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}} \bigwedge U$ mit Hilfe der Regeln ableiten. Außerdem gibt es zu jedem $Z \in \mathfrak{X}$ ein $Y \in \mathfrak{Y}$ mit $Y \subseteq Z$. Wäre dies nicht der Fall, würde Z die Menge $\mathcal{L}$ respektieren, aber nicht $\bigwedge X \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{Y}} \bigwedge Y$ (da $X \subseteq Z$ nach Bildungsvorschrift von $\mathfrak{X}$), somit wäre diese kumulierte Klausel nicht in $\mathcal{L}^*$, also ein Widerspruch.

Somit kann $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}} \bigwedge U$ weiter umgeformt werden. Man verwendet wieder eine Folge von Mengen, und zwar

$$\mathfrak{X} =: \mathfrak{X}'_0,\ \mathfrak{X}'_1,\ \mathfrak{X}'_2,\ \ldots,\ \mathfrak{X}'_m =: \mathfrak{X}'$$

mit der folgenden Bildungsvorschrift: Sei $Z_i \in \mathfrak{X}'_i$ mit $Z_i \notin \mathfrak{Y}$. Nach obiger Bemerkung gibt es dann ein $Y_i \in \mathfrak{Y}$ mit $Y_i \subseteq Z$. Damit bildet man $\mathfrak{X}'_{i+1} := \mathfrak{X}'_i \setminus \{Z_i\} \cup \{Y_i\}$. Das Verfahren bricht ab, wenn $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{Y}$.

Induktiv läßt sich nun $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'} \bigwedge U$ über die Zwischenschritte $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_i} \bigwedge U$ ableiten.
Induktionsanfang: $(\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_0} \bigwedge U) = (\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}} \bigwedge U)$, klar.
Induktionsschritt: $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_i} \bigwedge U$ kann abgeleitet werden. Der Übergang von $\mathfrak{X}'_i$ zu $\mathfrak{X}'_{i+1}$ erfolgte über $Y_i \subseteq Z_i$. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
\bigwedge Y_i \to \bigwedge Y_i & \text{(nach (K1))} \\
\bigwedge Y_i \cup Z_i \to \bigwedge Y_i & \text{(nach (K2))}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\bigwedge Z_i \to \bigwedge Y_i & \text{(da } Y_i \subseteq Z_i\text{)} \\
\bigwedge Z_i \cup X \to \bigwedge Y_i & \text{(nach (K2))} \\
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_i} \bigwedge U & \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_i \setminus \{Z_i\} \cup \{Y_i\}} \bigwedge U & \text{(nach (K4))} \\
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'_{i+1}} \bigwedge U & \text{(nach Definition von } \mathfrak{X}'_{i+1}\text{)}
\end{array}$$

Also läßt sich $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'} \bigwedge U$ mit Hilfe der Regeln ableiten.

Im letzten Beweisschritt kommt nun endlich die Regel (K3) zum Zuge: $\mathfrak{X}'$ wird schrittweise zu $\mathfrak{Y}$ erweitert. Wir betrachten dazu die Folge von Mengen

$$\mathfrak{X}' =: \mathfrak{X}''_0,\ \mathfrak{X}''_1,\ \mathfrak{X}''_2,\ \ldots,\ \mathfrak{X}''_p =: \mathfrak{Y}$$

mit der folgenden Bildungsvorschrift: Wenn es ein $Z_i \in \mathfrak{Y}$ mit $Z_i \notin \mathfrak{X}''_i$ gibt, dann sei $\mathfrak{X}''_{i+1} := \mathfrak{X}''_i \cup \{Z_i\}$. Offensichtlich gilt stets $\mathfrak{X}''_i \subseteq \mathfrak{Y}$. Daß sich nun $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{Y}} \bigwedge U$ ableiten läßt, zeigt man wieder induktiv über die Zwischenschritte $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_i} \bigwedge U$.

Induktionsanfang: $(\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_0} \bigwedge U) = (\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}'} \bigwedge U)$, klar.

Induktionsschritt: $\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_i} \bigwedge U$ kann abgeleitet werden. Dann ist

$$\begin{array}{ll}
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_i} \bigwedge U & \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_i \cup \{Z_i\}} \bigwedge U & \text{(nach (K3)} \\
\bigwedge X \to \bigvee_{U \in \mathfrak{X}''_{i+1}} \bigwedge U & \text{(nach Definition von } \mathfrak{X}''_{i+1}\text{)}
\end{array}$$

Also läßt sich $\bigwedge X \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{Y}} \bigwedge Y$ mit Hilfe der Regeln ableiten. □

Diese Regeln liefern gleichzeitig eine algorithmische Möglichkeit, auf syntaktischem Wege den Abschluß einer Menge $\mathcal{L}$ von kumulierten Klauseln zu bilden: Die Regeln (K1) – (K4) fordern (in Abhängigkeit von $\mathcal{L}$), daß bestimmte kumulierte Klauseln in $\mathcal{L}^*$ sein müssen. Diese fügt man einfach zu $\mathcal{L}$ hinzu. Diesen Prozeß wiederholt man iterativ, bis $\mathcal{L}$ (K1)–(K4) erfüllt. Es ist dann $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$.

Als Spezialfälle bzw. durch Ableitung erhält man die üblichen Regeln für Implikationen (Armstrong-Regeln):

(A1). $(\bigwedge A \to \bigwedge A) \in \mathcal{L}$ für $A \subseteq M$.
(A2). Wenn $(\bigwedge A \to \bigwedge \to B) \in \mathcal{L}$, dann $(\bigwedge A \cup C \to \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ für $C \subseteq M$.
(A3). Wenn $(\bigwedge A \to \bigwedge B)$, $(\bigwedge B \cup C \to \bigwedge D) \in \mathcal{L}$, dann $(\bigwedge A \cup C \to \bigwedge D) \in \mathcal{L}$.

und Klauseln und Implikationen

> Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee B) \in \mathcal{L}$ und $(\bigwedge A \cup \{b\} \to \bigwedge C) \in \mathcal{L}$ für alle $b \in B$, dann $(\bigwedge A \to \bigwedge C) \in \mathcal{L}$.

und den Zusammenhang zwischen kumulierten Klauseln und Implikationen

> Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ mit $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, dann $(A \to \bigcap \mathfrak{B}) \in \mathcal{L}$.

Wir verwenden im folgenden das Symbol $\vdash$ als Zeichen für syntaktische Ableitung nach Regeln.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} M &:= \{a, \overline{a}, b, \overline{b}\} \\ \mathcal{L} &:= \{(\emptyset \to a \mid \overline{a}),\ (a, \overline{a} \to \bot),\ (\emptyset \to b \mid \overline{b}),\ (b, \overline{b} \to \bot), (a \to b)\} \end{aligned}$$

Aus dieser Menge kumulierter Klauseln kann nun $(\overline{b} \to \overline{a})$ gefolgert werden:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} (\emptyset \to a \mid \overline{a}) \\ (a \to b) \end{array}\right\} \overset{(K4)}{\vdash} (\emptyset \to b \mid \overline{a}) \overset{(K2)}{\vdash} (\overline{b} \to b \mid \overline{a}) \\ (b, \overline{b} \to \bot) \end{array}\right\} \overset{(K4)}{\vdash} (\overline{b} \to \overline{a})$$

4 Bereinigte Mengen kumulierter Klauseln

Mit Hilfe der Modellklassen kann man eine Ordnungsrelation auf den kumulierten Klauseln definieren. Unter Verwendung dieser Relation, die auch direkt charakterisiert werden kann, ist es möglich Mengen von kumulierten Klauseln zu verkleinern, ohne daß sich die zugehörige Modellklasse ändert. Es werden also überflüssige kumulierte Klauseln entfernt; dazu wird eine Bereinigung definiert. Im zweiten Teil wird die Ordnungsrelation dazu verwendet, spezielle erzeugende Mengen von Theorien zu konstruieren.

Laut Definition (siehe Abschnitt 2) sind zwei kumulierte Klauseln α, $\beta \in \mathrm{KK}(M)$ äquivalent (i.Z. $\alpha \sim \beta$), wenn $\mathrm{Mod}(\alpha) = \mathrm{Mod}(\beta)$. In Analogie dazu definieren wir:

Definition 3. Auf $\mathrm{KK}(M)$ sei eine Relation $<$ erklärt durch

$$\alpha < \beta \ :\Longleftrightarrow\ \mathrm{Mod}(\alpha) \subset \mathrm{Mod}(\beta) \qquad \text{für } \alpha, \beta \in \mathrm{KK}(M).$$

Dazu sei $\lesssim$ die übliche reflexive Erweiterung. ◊

Da $\subseteq$ auf $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ eine Ordnungsrelation ist, ist auch $\lesssim$ eine Ordnung und $(\mathrm{KK}(M), \lesssim)$ eine geordnete Menge. Diese Relation läßt sich auch direkt ohne die Verwendung der Modellklassen charakterisieren.

Zunächst benötigen wir dazu einen weiteren Begriff: Eine kumulierte Klausel $\alpha \in \mathrm{KK}(M)$ heiße **tautologisch**, wenn $\mathrm{Mod}(\alpha) = \mathfrak{P}(M)$.

Hilfssatz 1 *Sei* $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$. *Dann sind äquivalent:*

1. α *ist tautologisch*
2. *Es gibt ein* $B \in \mathfrak{B}$ *mit* $B \subseteq A$.
3. $A \models \alpha$

Beweis:
(1) $\implies$ (3): Klar, da $A \in \mathfrak{P}(M)$.
(3) $\implies$ (2): $A \models \alpha$, d.h. es muß ein $B \in \mathfrak{B}$ geben mit $B \subseteq A$, also gilt (2).
(2) $\implies$ (1): Sei $X \in \mathfrak{P}(M)$. Wenn $X \not\subseteq A$, dann $X \in \mathrm{Mod}(\alpha)$. Wenn $X \subseteq A$, dann $B \subseteq A$, somit $X \models \alpha$, also $X \in \mathrm{Mod}(\alpha)$. □

Hilfssatz 2 *Seien* $\alpha = (\bigwedge A_\alpha \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\alpha} \bigwedge B)$, $\beta = (\bigwedge A_\beta \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\beta} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$ *und* β *sei nicht tautologisch. Dann dann ist* $\alpha \lesssim \beta$ *genau dann, wenn* $A_\alpha \subseteq A_\beta$ *und es für alle* $B \in \mathfrak{B}_\alpha$ *ein* $C \in \mathfrak{B}_\beta$ *gibt, mit* $C \subseteq A_\beta \cup B$.

Beweis:
„$\Longrightarrow$“: Weil β nicht tautologisch, ist $A_\beta \notin \mathrm{Mod}(\beta)$. Da $\alpha \lesssim \beta$ ist auch $A_\beta \notin \mathrm{Mod}(\alpha)$, daher muß $A_\alpha \subseteq A_\beta$ sein.

Sei $B \in \mathfrak{B}_\alpha$. Dann ist $A_\beta \cup B \in \mathrm{Mod}(\alpha)$, also $A_\beta \cup B \in \mathrm{Mod}(\beta)$. Da $A_\beta \subseteq A_\beta \cup B$, muß es ein $C \in \mathfrak{B}_\beta$ geben mit $C \subseteq A_\beta \cup B$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $X \in \mathrm{Mod}(\alpha)$. Wenn $A_\beta \not\subseteq X$, dann ist $X \in \mathrm{Mod}(\beta)$. Ansonsten ist $A_\beta \subseteq X$. Damit ist auch $A_\alpha \subseteq X$ und es gibt ein $B \in \mathfrak{B}_\alpha$ mit $B \subseteq X$. Somit gibt es ein $C \in \mathfrak{B}_\beta$ mit $C \subseteq B \cup A_\beta \subseteq X$, also $X \in \mathrm{Mod}(\beta)$. □

Daraus folgt sofort

$$\alpha \sim \beta \implies A_\alpha = A_\beta \qquad (*).$$

Wenn $\alpha \lesssim \beta$, dann läßt sich β aus α ableiten (da $\mathrm{Mod}(\alpha) \subseteq \mathrm{Mod}(\beta)$). Mit Hilfe der Regeln (K1) – (K4) geschieht dies folgendermaßen:
1. Fall: β ist nicht tautologisch

$$\bigwedge A_\alpha \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\alpha} \bigwedge B \qquad (\alpha)$$

$$\bigwedge A_\beta \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\alpha} \bigwedge B \qquad (\text{da } A_\alpha \subseteq A_\beta \text{ (K2)})$$

$$\bigwedge B \cup A_\beta \to \bigwedge C_B \qquad (\text{für } B \in \mathfrak{B}_\alpha,\ C_B \in \mathfrak{B}_\beta, \text{ da } \alpha \lesssim \beta)$$

$$\bigwedge A_\beta \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\alpha} \bigwedge C_B \qquad (|B_\alpha| \text{ mal (K4)})$$

$$\bigwedge A_\beta \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_\beta} \bigwedge B \qquad (\text{denn für alle } B \in \mathfrak{B}_\alpha \text{ gilt } C_B \in \mathfrak{B}_\beta, \text{ (K3)})$$

2. Fall: β ist tautologisch, nach Hilfssatz 1 gibt es ein $C \in \mathfrak{B}_\beta$ mit $C \subseteq A_\beta$.

$$\begin{array}{ll} \bigwedge C \to \bigwedge C & ((\mathrm{K1})) \\ \bigwedge A_\beta \to \bigwedge C & (\text{da } C \subseteq A_\beta \ (\mathrm{K2})) \\ \bigwedge A_\beta \to \bigvee\limits_{B \in \mathfrak{B}_\beta} \bigwedge B & (\text{da } C \in \mathfrak{B}_\beta, \ (\mathrm{K3})) \end{array}$$

Mit der $\lesssim$-Relation können wir nun Mengen von kumulierten Klauseln reduzieren, ohne daß sich die zugehörige Modellklasse ändert:

Hilfssatz 3 *Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ und α, $\beta \in \mathcal{L}$ mit $\alpha \lesssim \beta$ und $\alpha \neq \beta$. Dann ist*

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{L} \setminus \{\beta\}) \ .$$

Beweis: Da $\alpha \lesssim \beta$, ist $\mathrm{Mod}(\alpha) \subseteq \mathrm{Mod}(\beta)$. Mit $\alpha \in \mathcal{L} \setminus \{\beta\}$ folgt dann

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{L} \setminus \{\beta\}) \subseteq \mathrm{Mod}(\alpha) \subseteq \mathrm{Mod}(\beta) \ .$$

Damit erhält man

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mod}(\mathcal{L} \setminus \{\beta\}) \cap \mathrm{Mod}(\beta) = \mathrm{Mod}(\mathcal{L} \setminus \{\beta\}) \ .$$

□

Es bietet sich daher folgender Reduktionsoperator an:

Definition 4. Die Funktion $clr : \mathfrak{P}(\mathrm{KK}(M)) \to \mathfrak{P}(\mathrm{KK}(M))$ mit

$$clr(\mathcal{L}) := \min_{\lesssim}(\mathcal{L}), \qquad \text{für } \mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$$

heißt **Bereinigung**. Eine Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ heißt **bereinigt**, wenn $clr(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ gilt. ◊

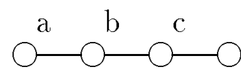
Nach den vorangegangen Hilfssätzen hat $clr(.)$ folgende Eigenschaften:

Hilfssatz 4 *Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$. Dann gilt:*

1. $clr(clr(\mathcal{L})) = clr(\mathcal{L})$
2. $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \mathrm{Mod}(clr(\mathcal{L}))$
3. $\mathcal{L}^* = clr(\mathcal{L})^*$

Diese Aussagen folgen leicht aus den obigen Überlegungen. Man kann $clr(.)$ also nutzen, um überflüssige kumulierte Klauseln aus $\mathcal{L}$ zu entfernen. Allerdings ist dieser Begriff der Überflüssigkeit relativ schwach, da die „bezüglich Transitivität überflüssigen“ kumulierten Klauseln nicht mit erfaßt werden.

Beispiel 3:
Sei $M = \{a, b, c, d\}$ und



$$\mathfrak{G} = \{\{b\},\ \{c\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{b,d\}\} .$$

In $\mathfrak{G}$ befinden sich genau die Knotenmengen, bei deren Entfernung der nebenstehende Graph in zwei Teile zerfällt. Es ist dann beispielsweise

$$\begin{aligned} (a \to c) &\sim (a \to a, c) \\ (a, b \to \bot) &< (a, b, c \to \bot) \end{aligned}$$

Man kann die Bereinigung nutzen, um einfache erzeugende Mengen der Theorie einer Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ anzugeben. Dazu definieren wir zunächst eine neue Eigenschaft kumulierter Klauseln:

Definition 5. Eine kumulierte Klausel $\alpha \in \mathrm{KK}(M)$ heißt **schlicht** bezüglich $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, wenn α minimal ist bezüglich $\mathfrak{G} \models \alpha$, d.h $\alpha \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ und

$$\beta \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G}),\ \beta \lesssim \alpha \implies \beta \sim \alpha .$$

$\Diamond$

Die Menge der schlichten kumulierten Klauseln bezüglich $\mathfrak{G}$ ist also $clr(\mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$. Für solche kumulierten Klauseln gilt auch die Rückrichtung von $(*)$:

Hilfssatz 5 *Seien* $\alpha = (\bigwedge A_\alpha \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_\alpha} \bigwedge B)$, $\beta = (\bigwedge A_\beta \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_\beta} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$ *schlicht bezüglich* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. *Dann gilt*

$$A_\alpha = A_\beta \iff \alpha \sim \beta .$$

Beweis: Die Rückrichtung folgt aus Hilfssatz 2 bzw. $(*)$, es ist also nur noch „ $\implies$ “ zu zeigen.

Dazu definieren wir

$$\gamma := (\bigwedge A_\alpha \to \bigvee_{C \in \mathfrak{B}_\alpha; D \in \mathfrak{B}_\beta} \bigwedge C \cup D) .$$

Offenbar gilt $\mathfrak{G} \models \gamma$ und alle $X \subseteq M$, die γ respektieren, respektieren auch α, also $\gamma \lesssim \alpha$. Da α schlicht, muß $\gamma \sim \alpha$ gelten. Analog folgt $\gamma \sim \beta$ und damit $\alpha \sim \beta$. $\square$

Mit Hilfe der schlichten kumulierten Klauseln können wir nun Erzeugendensysteme konstruieren.

Definition 6. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ heißt **schlicht** bezüglich $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

1. Alle $\alpha \in \mathcal{S}$ sind schlicht bezüglich $\mathfrak{G}$.
2. Für alle $\alpha \in \mathrm{KK}(M)$, die bezüglich $\mathfrak{G}$ schlicht sind, gibt es genau ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\alpha \sim \beta$.

$\Diamond$

Es ist dann $\mathcal{S} \subseteq clr(\mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$. Solche schlichten Mengen haben folgende Eigenschaften:

Satz 2 *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ schlicht bezüglich $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann ist:*

1. $\mathrm{Mod}(\mathcal{S}) = \mathfrak{G}$.
2. *Für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ mit $\mathfrak{G} \models \mathcal{L}$ gibt es für jedes $\alpha \in \mathcal{L}$ ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\beta \lesssim \alpha$.*
3. *$\mathcal{S}$ ist maximale Antikette in $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$.*
4. *Aus $\mathcal{S}$ kann $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ mit Hilfe der Regeln (K1), (K2), (K3) und (K4') abgeleitet werden, wobei*

   (K4'). Substitution':
   Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, $D \in \mathfrak{B}$ und $C \subseteq A \cup D$, dann $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in (\mathfrak{B} \setminus \{D\}) \cup \{C\}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$.

Beweis:
Wir zeigen zuerst (3): $\mathcal{S}$ ist Antikette, denn: Angenommen, es gäbe $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$ mit $\alpha \lesssim \beta$. Da β schlicht ist, ist dann $\alpha \sim \beta$. Somit gibt es für α *mindestens zwei* äquivalente kumulierte Klauseln in $\mathcal{S}$, nämlich α und β, im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{S}$ schlicht ist.

Daß $\mathcal{S}$ maximal sein muß, sieht man folgendermaßen: Sei $\gamma \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$. Dann gibt es sicher ein $\alpha \in clr(\mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$ mit $\alpha \lesssim \gamma$. α ist dann schlicht, also gibt es ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\alpha \sim \beta$, also ist $\beta \lesssim \gamma$. Somit sind alle Elemente von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$ mit einem $\beta \in \mathcal{S}$ vergleichbar.

Die Aussage (2) folgt unmittelbar aus den Überlegungen für (3): Da $\mathfrak{G} \models \mathcal{L}$, ist $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{G}))$. Nach obiger Argumentation gibt es für jedes $\alpha \in \mathcal{L}$ ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\beta \lesssim \alpha$.

Aussage (1) folgt wiederum aus (2): Es ist

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathfrak{G})) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})} \mathrm{Mod}(\alpha) .$$

Da $\mathfrak{G} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$, gibt es für alle $\alpha \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\beta \lesssim \alpha$, d.h. also $\mathrm{Mod}(\beta) \subseteq \mathrm{Mod}(\alpha)$. Somit ist

$$\mathfrak{G} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})} \mathrm{Mod}(\alpha) = \bigcap_{\beta \in \mathcal{S}} \mathrm{Mod}(\beta) = \mathrm{Mod}(\mathcal{S}) .$$

Nun zum Beweis von Punkt (4). Nach (2) gibt es für jedes $\alpha \in \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ ein $\beta \in \mathcal{S}$ mit $\beta \lesssim \alpha$. Auf Seite 12 wurde gezeigt, daß dann α aus β abgeleitet werden kann, wobei die Regel $(K4)$ nur in ihrer abgeschwächten Form $(K4')$ verwendet wurde. Somit ist ganz $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ auf diese Weise ableitbar. $\square$

Das Arbeiten mit solchen schlichten Klauseln kann von daher interessant sein, da sich beim Ableiten unter Verwendung von $(K4')$ die Anzahl der Konklusionsmengen einer kumulierten Klausel nicht vergrößert.

Beispiel 4: (fortgesetzt)
Zum vorangegangenen Beispiel 3 ist beispielsweise

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \;=\; & \{(\emptyset \to b \mid c),\ (a \to c),\ (d \to b),\\ & (a, b \to \bot),\ (a, d \to \bot,\ (c, d \to \bot)\}\end{aligned}$$

eine schlichte Menge.

5 Die Operatoren $\mathfrak{G}(.)$ und $\mathcal{L}(.)$

In diesem Abschnitt werden hauptsächlich nur die beiden oben genannten Operatoren eingeführt. Und zwar liefern diese zu einem $X \subseteq M$ die minimalen Teilmengen bzw. Modelle, die X enthalten, vergleichbar mit dem Hüllenoperator bei Hüllensystemen und Implikationen, siehe [GW96, S.80]. Wir werden in den folgenden Abschnitten stark von ihnen Gebrauch machen. Die Hilfssätze dieses Abschnitts charakterisieren diese Operatoren, speziell für $\mathcal{L}(.)$ wird ein Algorithmus zur Berechnung angegeben.

Definition 7. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann ist $\mathfrak{G}(.) : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ festgelegt durch

$$\mathfrak{G}(X) := \{Y \in \mathfrak{G} \mid Y \text{ minimal bezüglich } X \subseteq Y\}, \quad X \subseteq M.$$

Für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ ist analog $\mathcal{L}(.) \colon \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ mit

$$\mathcal{L}(X) := \{Y \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}) \mid Y \text{ minimal bezüglich } X \subseteq Y\} = (\mathrm{Mod}(\mathcal{L}))(X)\ .$$

$\Diamond$

$\mathfrak{G}(X)$ bzw. $\mathcal{L}(X)$ beinhalten also, analog dem Hüllenoperator bei Implikationen, die kleinsten Mengen bzw. Modelle, die X enthalten.

Hilfssatz 6 *Für $\mathfrak{G}(.)$ und $\mathcal{L}(.)$ gelten die folgenden Aussagen ($X, Y \subseteq M$):*

1. $\mathfrak{G}(X) = \min_{\subseteq}(X{\uparrow} \cap \mathfrak{G})$
2. $X \in \mathfrak{G} \implies \mathfrak{G}(X) = \{X\}$
3. $\mathfrak{G}(X) = \emptyset \iff \forall Y \in \mathfrak{G} \colon X \not\subseteq Y$

4. $X \subseteq Y \implies \forall Y_0 \in \mathfrak{G}(Y)\ \exists X_0 \in \mathfrak{G}(X)\colon X_0 \subseteq Y_0$

5. $\mathfrak{G} \models (\bigwedge X \to \bigvee_{Y\in\mathfrak{Y}} \bigwedge Y) \iff \forall Z \in \mathfrak{G}(X)\ \exists Y \in \mathfrak{Y}\colon Y \subseteq Z$

6. $\mathcal{L}(X) = \min_{\subseteq}(\mathrm{Mod}(\mathcal{L} \cup \{\emptyset \to \bigwedge X\}))$

Diese Tatsachen sind leicht einzusehen. $\mathfrak{G}(.)$ läßt sich auch auf andere Weise charakterisieren:

Hilfssatz 7 *Sei* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, $X \subseteq M$ *und* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. *Es ist* $\mathfrak{G}(X) = \mathfrak{X}$ *genau dann, wenn gilt:*

1. *Für alle* $Z \in \mathfrak{X}$ *gilt* $X \subseteq Z$ *und* $Z \in \mathfrak{G}$.

2. $\mathfrak{X}$ *ist bezüglich der Inklusion eine Antikette.*

3. *Für alle* $Y \in \mathfrak{G}$ *mit* $X \subseteq Y$ *gibt es ein* $Z \in \mathfrak{X}$, *sodaß* $Z \subseteq Y$.

Beweis: Aus der Definition von $\mathfrak{G}(.)$ ist klar, daß $\mathfrak{G}(X)$ die drei Bedingungen erfüllt.

Erfülle nun $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ die Bedingungen (1) – (3). Wir zeigen zuerst $\mathfrak{G}(X) \subseteq \mathfrak{X}$. Sei $Y \in \mathfrak{G}(X)$. Dann ist $X \subseteq Y$ und $Y \in \mathfrak{G}$ und Y ist minimal bezüglich dieser Eigenschaft. Es gibt nun ein $Z \in \mathfrak{X}$ mit $X \subseteq Z \subseteq Y$ und $Z \in \mathfrak{G}$, also ist $Z = Y$ und somit $Y \in \mathfrak{X}$.

Sei nun $V \in \mathfrak{X}$, dann ist $X \subseteq V$ und $V \in \mathfrak{G}$. Angenommen, V wäre bezüglich dieser Eigenschaften nicht minimal, d.h. es gäbe ein $W \in \mathfrak{G}$ mit $X \subseteq W \subsetneq V$. Dann gibt es ein $Z \in \mathfrak{X}$ mit $Z \subseteq W$ und damit $Z \subseteq W \subsetneq V$, somit kann $\mathfrak{X}$ keine Antikette sein, Widerspruch. Also ist $V \in \mathfrak{G}(X)$ und somit $\mathfrak{G}(X) = \mathfrak{X}$. □

Wenn man für ein $X \subseteq M$ die Menge $\mathfrak{G}(X)$ bestimmen will, muß man im Allgemeinen alle $Y \in \mathfrak{G}$ finden, für die $X \subseteq Y$ gilt und dabei das Minimum dieser Menge ermitteln (nach Hilfssatz 6), falls $\mathfrak{G}$ nicht in irgendeiner Weise geschickt sortiert ist. Auch $\mathcal{L}(X)$ könnte man auf diese Weise aus $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ bestimmen. Man kann die Menge $\mathcal{L}(X)$ aber auch relativ einfach direkt algorithmisch ermitteln:

Hilfssatz 8 *Für* $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ *und* $X \subseteq M$ *läßt sich* $\mathcal{L}(X)$ *auf folgende Weise ermitteln: Man bildet eine Folge von Teilmengen von* $\mathfrak{P}(M)$

$$\{X\} =: \mathfrak{X}_0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2, \ldots,\ \mathfrak{X}_n =: \mathfrak{X}$$

nach folgender Bildungsvorschrift:
Gibt es ein $Z \in \mathfrak{X}_i$ *mit* $Z \not\models (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, *dann sei*

$$\mathfrak{X}_{i+1} := (\mathfrak{X}_i \setminus \{Z\}) \cup \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \{B \cup Z\}\ .$$

Dies geschieht solange, bis $\mathfrak{X} \models \mathcal{L}$. *Dann ist* $\mathcal{L}(X) = \min_{\subseteq}(\mathfrak{X})$.
Es ist bei dieser Berechnung auch zulässig, Mengen aus $\mathfrak{X}_i$ *wegzulassen, wenn für jede dieser einzelnen Mengen schon eine Teilmenge in* $\mathfrak{X}_i$ *enthalten ist, d.h. es kann* $\mathfrak{X}_i$ *durch* $\min_{\subseteq}(\mathfrak{X}_i)$ *ersetzen werden.*

Beweis: Diese Bildungsvorschrift ist nicht deterministisch, der Algorithmus terminiert aber, da keine Menge $\mathfrak{X}_i$ in der Folge mehrmals vorkommen kann (siehe dazu erster Teil von Beweis von Satz 1).

Wir zeigen, daß $\min_\subseteq(\mathfrak{X})$ die Bedingungen (1)–(3) von Hilfssatz 7 erfüllt, wobei $\mathfrak{G} = \mathrm{Mod}(\mathcal{L})$. Nach der Bildungsvorschrift gilt für alle $Z \in \mathfrak{X}$: $X \subseteq Z$ und $Z \models \mathcal{L}$, außerdem ist $\min_\subseteq(\mathfrak{X})$ natürlich eine Antikette. Das eventuelle Weglassen von Mengen in den $\mathfrak{X}_i$ hat darauf keinen Einfluß.

Es ist also nur noch zu zeigen, daß es zu jedem $Y \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ und $Y \models \mathcal{L}$ ein $Z \in \min_\subseteq(\mathfrak{X})$ gibt mit $Z \subseteq Y$. Dies geschieht induktiv, indem man zeigt, daß es in jedem $\mathfrak{X}_i$ ein derartiges Z gibt:
Induktionsanfang: In $\mathfrak{X}_0 = \{X\}$ gibt es solch ein Z, nämlich $Z = X \subseteq Y$.
Induktionsschritt: Es gebe $Z \in \mathfrak{X}_i$ mit $Z \subseteq Y$. Der Übergang von $\mathfrak{X}_i$ zu $\mathfrak{X}_{i+1}$ erfolgte über die kumulierte Klausel $\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B$ mit $A \subseteq Z' \in \mathfrak{X}_i$ durch $\mathfrak{X}_{i+1} := (\mathfrak{X}_i \setminus \{Z'\}) \cup \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B \cup Z'\}$. Wenn $Z' \neq Z$, dann ist $Z \in \mathfrak{X}_{i+1}$ und die Behauptung bewiesen. Sei nun $Z' = Z$. Da Y die kumulierte Klausel $\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B$ respektiert, muß es ein $B \in \mathfrak{B}$ geben mit $B \subseteq Y$, da nämlich $A \subseteq Z' \subseteq Y$. Somit ist $B \cup Z' \subseteq Y$, und da $B \cup Z' \in \mathfrak{X}_{i+1}$ folgt die Behauptung.

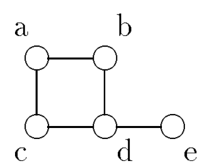
Wenn $Z \subseteq Y$ und Z in $\mathfrak{X}_i$ bei den weiteren Berechnungen weggelassen wird, dann heißt das, daß es ein $U \in \mathfrak{X}_i$ gibt mit $U \subseteq Z \subseteq Y$, die gewünschte Eigenschaft bleibt also stets erhalten.

Also gibt es ein $Z \in \mathfrak{X}$ mit $Z \subseteq Y$ und daher auch ein $Z \in \min_\subseteq(\mathfrak{X})$ mit $Z \subseteq Y$.

Damit erfüllt $\min_\subseteq(\mathfrak{X})$ alle Bedingungen für $\mathcal{L}(X)$, also $\mathcal{L}(X) = \min_\subseteq(\mathfrak{X})$. $\square$

Beispiel 5:
Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ und $\mathfrak{G}$ bestehe aus allen Knotenmengen, bei deren Entfernung der untenstehende Graph in mehrere Teile zerfällt. Also ist $\mathfrak{G} = \{\{a, d\}, \{a, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d\}\}$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}(\{b, c\}) &= \{\{b, c\}\} \\
\mathfrak{G}(\{a\}) &= \{\{a, d\}\} \\
\mathfrak{G}(\{c\}) &= \{\{c, b\},\ \{c, d\}\} \\
\mathfrak{G}(\{a, b, c\}) &= \emptyset
\end{aligned}$$



6 Bestimmung von $Mod(\mathcal{L})$

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit der Frage, wie zu einer Menge $\mathcal{L} \in \mathrm{KK}(M)$ die Modellklasse $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ ermittelt werden kann. Das im folgenden beschriebene Verfahren ist ganz analog dem Vorgehen in [GW96, S.66f]. Wir definieren eine lineare Ordnung auf $\mathfrak{P}(M)$ und geben dann eine Möglichkeit an, aus einem Modell das bezüglich dieser Ordnung nächstgrößere Modell zu bestimmen. Auf diese Weise kann man, beginnend beim kleinsten, alle Modelle ermitteln.

Zunächst denken wir uns $\mathfrak{P}(M)$ lexikographisch geordnet, der Einfachheit halber wird angenommen, daß $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Die lektische Ordnung ist nun folgendermaßen definiert, $A, B \subseteq M$:

$$A < B \;:\Longleftrightarrow\; \exists i \in B \setminus A : A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} \; .$$

Dies ist eine streng konnexe Ordnung, d.h. für $A, B \subseteq M$ mit $A \neq B$ gilt stets $A < B$ oder $B < A$. Dabei sei $\leq$ die übliche reflexive Erweiterung von $<$. Weiter definieren wir für $A, B \subseteq M$, $i \in M$:

$$A <_i B \;:\Longleftrightarrow\; i \in B \setminus A \text{ und } A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots, i-1\} \; .$$

Für $<$ und $<_i$ gelten die folgenden Aussagen:

(1) $A \subseteq B \implies A \leq B$
(2) $A < B \iff A <_i B$ für ein $i \in M$
(3) $A <_i B$, $A <_j C$ mit $i < j \implies C <_i B$

Weiterhin benötigt man noch einen Operator auf $\mathfrak{P}(M)$. Dazu definieren wir zu $X \subseteq M$:

$$\mathcal{L}_{min}(X) := \begin{cases} \min_< \mathcal{L}(X), & \text{falls } \mathcal{L}(X) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\mathcal{L}(.)$ und $\mathcal{L}_{min}(.)$ gilt folgendes ($X, Y \subseteq M$):

(4) $X \in \mathcal{L}(A) \implies A \subseteq X$ und $A \leq X$
(5) $\mathcal{L}(A) = \{A\} \iff \mathcal{L}_{min}(A) = A$, $A \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}) \implies \mathcal{L}(X) = \{A\}$
(6) $A \subseteq B \implies \forall Y \in \mathcal{L}(B) \; \exists X \in \mathcal{L}(A)$ mit $X \subseteq Y$
(7) $A \subseteq B \implies \mathcal{L}_{min}(A) \leq \mathcal{L}_{min}(B)$ oder $\mathcal{L}_{min}(B) = \emptyset$.
(8) $\emptyset \neq A \subseteq B$, $\mathcal{L}_{min}(B) \neq \emptyset \implies \mathcal{L}_{min}(A) \neq \emptyset$.

Wir definieren nun für $A \subseteq M$, $i \in M$:

$$A \oplus i := \mathcal{L}_{min}\Big((A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}) \cup \{i\}\Big)$$

und erhalten folgenden Satz:

Satz 3 *Die kleinste Teilmenge von M, die $\mathcal{L}$ respektiert und bezüglich der lektischen Ordnung größer ist als eine gegebene Menge $A \subset M$, ist, sofern sie existiert*

$$A \oplus i,$$

wobei i das größte Element von M ist, für das $A <_i A \oplus i$ gilt.

Beweis: Sei A^+ die lektisch kleinste Menge nach A, die $\mathcal{L}$ respektiert, falls eine solche existiert. Wegen $A < A^+$ gibt es nach (2) ein $i \in M$, so daß $A <_i A^+$. Sei $\bar{A} := (A \cap \{1, 2, \ldots, i-1\}) \cup \{i\}$, dann ist

$$A \subseteq \bar{A} \subseteq A^+ \ .$$

Da nach (5) $\mathcal{L}_{min}(A^+) = A^+ \neq \emptyset$ ist nach (8) $\mathcal{L}_{min}(\bar{A}) \neq \emptyset$, somit folgt nach (7)

$$\mathcal{L}_{min}(A) \leq \mathcal{L}_{min}(\bar{A}) \leq A^+ \ ,$$

Außerdem ist $A \lneq \bar{A}$ und nach (4) ist $\bar{A} \leq \mathcal{L}_{min}(\bar{A})$, also $A \lneq \mathcal{L}_{min}(\bar{A})$ und damit ist $\mathcal{L}_{min}(\bar{A}) = A^+$. Daß i das größte Element mit $A <_i A \oplus i$ ist, folgt aus (3), denn $A <_j A \oplus j$ mit $i \neq j$ hat wegen $A \oplus i = A^+ < A \oplus j$ nach (2) $j < i$ zur Folge. □

Damit ergibt sich der **Algorithmus zur Bestimmung aller Modelle** zu einer Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, der die Modelle nacheinander in lektischer Reihenfolge generiert:
Das lektisch kleinste Modell ist, sofern es existiert, $\mathcal{L}_{min}(\emptyset)$. Für eine gegebene Menge $A \subset M$ findet man das lektisch nächste Modell, falls es existiert, indem man für alle Elemente von $M \setminus A$, beginnend mit dem größten und dann absteigend, prüft, wann erstmals $A <_i A \oplus i$ auftritt. $A \oplus i$ ist dann das gesuchte Modell.

Bei der praktischen Ausführung des Algorithmus kann man zur Berechnung von $\mathcal{L}_{min}$ die iterative Berechnung von $\mathcal{L}$ nach Hilfssatz 8 verwenden, wobei das Bilden des Minimums bezüglich der Inklusion am Ende entfallen kann nach (1).

Hier noch die Beweise der Aussagen (1) – (8), die in diesem Kapitel vorkamen.
Beweis:

(1). $A \subseteq B \implies A \leq B$

Wenn $A = B$, dann gilt die Behauptung. Sei nun $A \subsetneq B$ und i das kleinste Element von $B \setminus A$. Dann ist $A \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots i-1\}$ und somit $A < B$.

(2). $A < B \iff A <_i B$ für ein $i \in M$

$$\begin{aligned} A < B &\iff \exists i \in B \setminus A \colon A \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots i-1\} \\ &\iff i \in B \setminus A, \ \ A \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots i-1\} \\ &\iff A <_i B \text{ für ein } i \in M \end{aligned}$$

(3). $A <_i B$, $A <_j C$ mit $i < j \implies C <_i B$

Da $A <_i B$, ist $A \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = B \cap \{1, 2, \ldots i-1\}$, und da $A <_j C$ ist $A \cap \{1, 2, \ldots j-1\} = C \cap \{1, 2, \ldots j-1\}$. Weil $i < j$, ist auch $A \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = C \cap \{1, 2, \ldots i-1\}$ und somit $B \cap \{1, 2, \ldots i-1\} = C \cap \{1, 2, \ldots i-1\}$. Außerdem ist $i \in B$, $i \notin A$ und somit $i \notin C$, also $C <_i B$.

(4). $X \in \mathcal{L}(A) \implies A \subseteq X$ und $A \leq X$

Sei $X \in \mathcal{L}(A)$, also $\mathcal{L}(A) \neq \emptyset$. Dann gilt $A \subseteq X$ aufgrund der Definition von $\mathcal{L}(.)$ und damit folgt $A \leq X$ nach (1).

(5). $\mathcal{L}(A) = \{A\} \iff \mathcal{L}_{min}(A) = A$, $A \in \text{Mod}(\mathcal{L}) \implies \mathcal{L}(X) = \{A\}$

$\mathcal{L}(A) = \{A\} \iff \mathcal{L}_{min}(A) = A$: Die Richtung " $\implies$ " ist trivial. Wenn nun $\mathcal{L}_{min}(A) = A$, dann $A \in \mathcal{L}(A)$, und da $\mathcal{L}(A)$ bezüglich der Inklusion eine Antikette ist und nach (4) für alle $X \in \mathcal{L}(A) : A \subseteq X$ gilt, muß $\mathcal{L}(A) = \{A\}$ sein.

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus Hilfssatz 6.

(6). $A \subseteq B \implies \forall Y \in \mathcal{L}(B)\ \exists X \in \mathcal{L}(B)$ mit $X \subseteq Y$

Sei $Y \in \mathcal{L}(B)$, dann $A \subseteq B \subseteq Y$ nach (4) und Y respektiert $\mathcal{L}$. Dann gibt es nach Hilfssatz 7 ein $X \in \mathcal{L}(A)$ mit $X \subseteq Y$.

(7). $A \subseteq B \implies \mathcal{L}_{min}(A) \leq \mathcal{L}_{min}(B)$ oder $\mathcal{L}_{min}(B) = \emptyset$

Sei $Y := \mathcal{L}_{min}(B)$. Wenn $Y \neq \emptyset$, dann ist $Y \in \mathcal{L}(B)$ und es gibt nach (6) ein $X \in \mathcal{L}(A)$ mit $X \subseteq Y$, also $X \leq Y$ nach (1). Daher gilt $\mathcal{L}_{min}(A) \leq X \leq Y = \mathcal{L}_{min}(Y)$.

(8). $\emptyset \neq A \subseteq B$, $\mathcal{L}_{min}(B) \neq \emptyset \implies \mathcal{L}_{min}(A) \neq \emptyset$

Wenn $\mathcal{L}_{min}(B) \neq \emptyset$, dann ist $\mathcal{L}(B) \neq \emptyset$ und es gibt mindestens ein Modell Z von $\mathcal{L}$ mit $B \subseteq Z$. Da aber $A \subseteq B \subseteq Z$, ist $\mathcal{L}(A) \neq \emptyset$ und damit $\mathcal{L}_{min}(A) \neq \emptyset$.

□

7 Nichtredundante Erzeugendensysteme

Es soll nun die Frage behandelt werden, wie „Basen" für Mengen von kumulierten Klauseln aussehen können. Der hier verwendete Ansatz liefert zwar in der Regel nur nichtredundante und keine minimalen Erzeugendensysteme, wir verwenden dafür aber gelegentlich trotzdem den Begriff Basis.

Zuerst werden die kanonischen kumulierten Klauseln eingeführt, die bezüglich einer Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine gewisse Maximalität besitzen. Des weiteren werden Pseudomodelle als Teilmengen von M definiert und charakterisiert. Mit Hilfe dieser beiden Begriffe können wir dann ein nichtredundantes Erzeugendensystem $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ für $\text{Th}(\mathfrak{G})$ konstruieren.

Definition 8. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $X \subseteq M$. Dann ist

$$\alpha_X^{\mathfrak{G}} := (\bigwedge X \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{G}(X)} \bigwedge Y).$$

die **kanonische kumulierte Klausel** bezüglich X und $\mathfrak{G}$. Für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ definiert man analog die kanonische kumulierte Klausel $\alpha_X^{\mathcal{L}} := \alpha_X^{\mathrm{Mod}(\mathcal{L})}$. ◊

Mengen, die nur aus kanonischen kumulierten Klauseln bezüglich einer Menge $\mathfrak{G}$ bestehen, nennen wir ebenfalls **kanonisch** bezüglich $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 9 *Für $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ gelten folgende Aussagen:*

1. $A \subseteq M$ *respektiert* $\alpha_X^{\mathfrak{G}} \iff X \not\subseteq A$ *oder* $\exists Y \in \mathfrak{G} \colon X \subseteq Y \subseteq A$.
2. $Y \in \mathfrak{G} \implies Y \models \alpha_X^{\mathfrak{G}}$.
3. $X \models \alpha_X^{\mathfrak{G}} \iff X \in \mathfrak{G}$.

Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden, denn diese Tatsachen sind leicht einzusehen. Jetzt benötigen wir noch Teilmengen von M, die als Prämissen besonders geeignet sind.

Definition 9. $P \subseteq M$ heißt **Pseudomodell** von $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, falls gilt:

1. $P \notin \mathfrak{G}$
2. für jedes Pseudomodell $Q \subsetneq P$ gibt es ein $X \in \mathfrak{G}$ mit $Q \subseteq X \subseteq P$.

P ist ein Pseudomodell von $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, falls P Pseudomodell von $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ ist. ◊

Zur bequemeren Beschreibung verwenden wir analog zur Modellklasse

$$\mathrm{PMod}(\mathfrak{G}) := \{X \subseteq M \mid X \text{ Pseudomodell von } \mathfrak{G}\} \quad \text{bzw.}$$
$$\mathrm{PMod}(\mathcal{L}) := \{X \subseteq M \mid X \text{ Pseudomodell von } \mathcal{L}\}$$

als **Menge der Pseudomodelle** von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathcal{L}$. Die Pseudomodelle haben in Verbindung mit den kanonischen kumulierten Klauseln eine interessante Eigenschaft:

Hilfssatz 10 *Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $P, Q \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$, $P \neq Q$. Dann respektiert P die kumulierte Klausel $\alpha_Q^{\mathfrak{G}}$.*

Beweis: Es ist $\alpha_Q^{\mathfrak{G}} = (\bigwedge Q \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{G}(Q)} \bigwedge Y)$. Wenn $Q \not\subseteq P$, dann respektiert P diese kumulierte Klausel. Im Fall $Q \subseteq P$ gibt es ein $X \in \mathfrak{G}$ mit $Q \subseteq X \subseteq P$. Nach Hilfssatz 9 respektiert X die kumulierte Klausel $\alpha_Q^{\mathfrak{G}}$. Es gibt also ein $Y \in \mathfrak{G}(Q)$ mit $Y \subseteq X$. Da dann auch $Y \subseteq P$, wird $\alpha_Q^{\mathfrak{G}}$ auch in diesem Fall von P respektiert. □

Mit Hilfe der Pseudomodelle kann man nun eine Basis konstruieren.

Satz 4 *Sei* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, *dann ist*

$$\mathcal{B}^{\mathfrak{G}} := \{\alpha_P^{\mathfrak{G}} \mid P \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})\}$$

ein nichtredundantes Erzeugendensystem für $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$.

Beweis: Es ist also $\mathrm{Mod}(\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{G}$ zu zeigen. Die Aussage (2.) des Hilfssatzes 9 liefert unmittelbar $\mathfrak{G} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{B}^{\mathfrak{G}})$. Es ist also noch zu zeigen, daß $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ vollständig ist, d.h. daß jedes $A \subseteq M$ mit $A \models \mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ auch in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Angenommen, es gäbe ein $A \subseteq M$ mit $A \notin \mathfrak{G}$, aber $A \models \mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$. Dann respektiert A auch alle $\alpha_Q^{\mathfrak{G}}$ mit Q Pseudomodell und $Q \subseteq A$, es gibt also zu jedem solchen Q ein $X \in \mathfrak{G}$ mit $Q \subseteq X \subseteq A$. Damit ist A selbst ein Pseudomodell und respektiert daher $\alpha_A^{\mathfrak{G}} \in \mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ nicht, Widerspruch.

Daß $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ nicht redundant ist, folgt leicht aus Hilfssatz 10, denn für $P \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$ wird die Menge $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}} \setminus \{\alpha_P^{\mathfrak{G}}\}$ von P respektiert im Gegensatz zu $P \notin \mathfrak{G}$.

□

Allerdings erhält man im allgemeinen keine Minimalität, sondern wirklich nur Nichtredundanz, wie ein Beispiel am Ende des Abschnitts verdeutlicht. Der folgende Hilfssatz liefert eine Zuordnung zwischen den Pseudomodellen und kumulierten Klauseln von $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$. Wie bereits angedeutet ist, diese in der Regel nicht injektiv.

Hilfssatz 11 *Sei* $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$. *Dann gibt es zu jedem* $P \in \mathrm{PMod}(\mathcal{L})$ *eine kumulierte Klausel* $\alpha = \left(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B\right) \in \mathcal{L}$ *mit* $A \subseteq P$ *und für alle Pseudomodelle* $Q \subsetneq P$ *gilt* $A \nsubseteq Q$.

Beweis: Sei P ein Pseudomodell. Da P die Menge $\mathcal{L}$ nicht respektiert, muß es ein $\alpha = \left(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B\right) \in \mathcal{L}$ geben, das von P nicht respektiert wird, also $A \subseteq P$.

Angenommen, es gäbe ein Pseudomodell $Q \subsetneq P$ mit $A \subseteq Q$. Dann gäbe es ein $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ mit $Q \subseteq X \subseteq P$, also $A \subseteq Q$. X muß α respektieren somit gibt es ein $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subseteq X \subseteq P$, d.h. P respektiert α, Widerspruch. Im Falle $\mathfrak{B} = \emptyset$ gibt es keine Pseudomodelle $Q \subsetneq P$, da sonst P kein Pseudomodell wäre.

□

Dies ist also ebenfalls ein Beweis, daß $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ nichtredundant ist. Man kann aber nicht ableiten, daß es mindestens so viele kumulierte Klauseln wie Pseudomodelle geben muß, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 6:
Sei $M = \{a, b, c, d\}$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; &\{(a \to b \mid c),\ (b \to a \mid d),\ (c \to a \mid d),\ (d \to b \mid c),\\ &(a \wedge d \to \bot), (b \wedge c \to \bot)\}\end{aligned}$$

a	b
c	d

Die Modelle von $\mathcal{L}$ sind in der obenstehenden Figur genau die Rechtecke aus zwei benachbarten Quadraten und die leere Menge. Die Pseudomodelle sind alle ein- und dreielementigen Teilmengen, also insgesamt 8, während $\mathcal{L}$ nur aus 6 kumulierten Klauseln besteht. Die über Pseudomodelle erzeugte Basis wäre

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathfrak{G}} &= \{(a \to a, b \mid a, c),\ (b \to a, b \mid b, d), \\ &\quad (c \to a, c \mid c, d),\ (d \to b, d \mid c, d), \\ &\quad (a, b, c \to \bot),\ (a, b, d \to \bot),\ (a, c, d \to \bot),\ (b, c, d \to \bot)\}\ . \end{aligned}$$

8 Bestimmung einer erzeugenden Menge von $Th(\mathfrak{G})$

Meist will man zu einer Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ nicht $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ komplett bestimmen, es ist völlig ausreichend, ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ zu ermitteln. Ein solches ist die Menge $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ des vorangegangenen Abschnitts, mit deren algorithmischer Ermittlung wir uns jetzt befassen wollen. Das beschriebene Verfahren ist vergleichbar mit der Merkmalsexploration in [GW96, S.85f]. Dabei wird $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ schrittweise aufgebaut und auf Vollständigkeit geprüft. Die Praktikabilität dieses Vorgehens wird durch den Satz dieses Abschnitts abgesichert.

Eine bezüglich $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ kanonische Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ heißt **streng kanonisch** bezüglich $\mathfrak{G}$, wenn alle in $\mathcal{L}$ vorkommenden Prämissen Pseudomodelle von $\mathfrak{G}$ sind, d.h. für alle $\alpha \in \mathcal{L}$ gibt es ein $P \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$, so daß $\alpha = \alpha_P^{\mathfrak{G}}$.

Satz 5 *Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ streng kanonisch bezüglich $\mathfrak{G}$. Weiterhin sei $X \subseteq M$ das lektisch kleinste Modell von $\mathcal{L}$ mit $X \notin \mathfrak{G}$. Dann ist X das lektisch kleinste Pseudomodell von $\mathfrak{G}$, das nicht als Prämisse in $\mathcal{L}$ vorkommt.*

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß X ein Pseudomodell von $\mathfrak{G}$ ist. Laut Voraussetzung gilt $X \notin \mathfrak{G}$. Sei nun $Q \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$ mit $Q \subsetneq X$. Angenommen, Q wäre keine Prämisse in $\mathcal{L}$, dann respektiert Q nach Hilfssatz 10 die kumulierten Klauseln in $\mathcal{L}$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß X das kleinste Modell von $\mathcal{L}$ ist, denn aus $Q \subsetneq X$ folgt $Q < X$. Also ist $\alpha_Q^{\mathfrak{G}} \in \mathcal{L}$. Da $X \models \alpha_Q^{\mathfrak{G}}$, gibt es eine Konklusionsmenge Y in $\alpha_Q^{\mathfrak{G}}$ mit $Y \subseteq X$. Da $Y \in \mathfrak{G}$ und $Y \subseteq X$, ist X ein Pseudomodell.

Aus dieser Argumentation folgt auch, daß X das kleinste Pseudomodell ist, das nicht als Prämisse in $\mathcal{L}$ vorkommt. $\square$

Damit ergibt sich der **Algorithmus zur Bestimmung des Erzeugendensystems $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ der Theorie** zu einer Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$:
Zu Anfang setzt man $\mathcal{L} := \emptyset$. Man ermittelt nun nacheinander in lektischer Reihenfolge, beginnend beim kleinsten, alle Modelle von $\mathcal{L}$. Sobald eines dieser Modelle X nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, wird die kumulierte Klausel $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ zu $\mathcal{L}$ hinzugefügt und die Berechnung der Modelle mit der vergrößerten Menge $\mathcal{L}$ fortgesetzt.

Auf diese Weise wird $\mathcal{L}$ schrittweise erweitert. Wenn schließlich alle Modelle berechnet sind, ist $\mathcal{L} = \mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ und somit ein nichtredundantes Erzeugendensystem von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$.

Beweis: (des Algorithmus)

Dieser Algorithmus terminiert sicher, da $X \in \mathfrak{P}(M)$ und kein X mehrmals vorkommen kann.

Zur besseren Übersichtlichkeit werden im Folgenden die nacheinander gebildeten Mengen $\mathcal{L}$ und die auftauchenden X indiziert, d.h. wir haben laut Definition des Algorithmus

$$
\begin{aligned}
&\emptyset = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_m = \mathcal{L},\ m \in \mathbb{N} \text{ mit}\\
&\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i \cup \{\alpha^{\mathfrak{G}}_{X_i}\},\ i = 0 \ldots m-1 \text{ wobei}\\
&X_0 \subseteq M \text{ lektisch minimal bezüglich } X_0 \notin \mathfrak{G} \text{ und}\\
&X_{i+1} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{i+1}) \text{ lektisch minimal bezüglich } X_{i+1} > X_i \text{ und } X_{i+1} \notin \mathfrak{G},\\
&\qquad i = 0 \ldots m-1
\end{aligned}
$$

Behauptung: *$\mathcal{L}_i$ ist streng kanonisch bezüglich $\mathfrak{G}$ und X_i ist das kleinste Modell von $\mathcal{L}_i$, das nicht in $\mathfrak{G}$ enthalten ist.*

Induktionsanfang: $\mathcal{L} := \emptyset$ ist streng kanonisch, die zweite Behauptung entspricht der Festlegung von X_0.

Induktionsschritt: Sei $\mathcal{L}_i$ streng kanonisch und X_i sei das kleinstes Modell von $\mathcal{L}_i$ mit $X_i \notin \mathfrak{G}$. Dann ist X_i nach Satz 5 ein Pseudomodell von $\mathfrak{G}$, somit ist auch $\mathcal{L}_{i+1}$ streng kanonisch.

Sei nun $Y \in \mathfrak{P}(M)$ das kleinste Modell von $\mathcal{L}_{i+1}$, für das $Y \notin \mathfrak{G}$ gilt. Da $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}_{i+1}$, ist $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_i) \supseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{i+1})$ und weil X_i nach Satz 5 das kleinste Element in $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_i) \setminus \mathfrak{G}$ ist, muß $X_i \leq Y$ sein. Da X_i aber $\alpha^{\mathfrak{G}}_{X_i} \in \mathcal{L}_{i+1}$ nicht respektiert, ist $X_i \neq Y$, also stellt die Bedingung $X_{i+1} > X_i$ keine wirkliche Einschränkung dar und es ist $Y = X_{i+1}$.

Somit findet der Algorithmus alle Pseudomodelle in lektischer Reihenfolge und laut Satz 4 ist $\mathcal{L}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$. □

9 Transitivitätsvermeidende Mengen

Die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ aus $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ kann unter Umständen recht aufwendig sein. Betrachten wir deshalb erzeugende Mengen von $\mathcal{L}$, für die diese Berechnung relativ einfach ist. In Anlehnung an [W89] verwenden wir dazu den Begriff „transitivitätsvermeidend“, obwohl dieser Begriff hier nicht ganz seiner Bedeutung gerecht wird. Solche Mengen erlauben die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ in Linearzeit und verbessern dadurch die Komplexität von Algorithmen mit kumulierten Klauseln enorm. Nach Einführung kleinerer Hilfsmittel wird eine Möglichkeit angegeben, wie eine transitivitätsvermeidende erzeugende Menge zu einer Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$

aussehen kann. Abschließend wird ein Algorithmus zur Erzeugung eben dieser Menge angegeben.

Wir definieren zunächst einen neuen Operator ($X \subseteq M$):

$$\mathcal{L}^\circ(X) := \begin{cases} \{X\}, \text{ wenn } X \models \mathcal{L} \\ \{C \mid \alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}, X \not\models \alpha, X \subseteq C \in \mathfrak{B}\}, \\ \hfill \text{sonst} \end{cases}$$

Die Berechnung von $\mathcal{L}^\circ(X)$ ist relativ einfach und in Linearzeit möglich (siehe dazu Algorithmus 8, S. 49).

Definition 10. $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ heißt **transitivitätsvermeidend**, wenn für alle $X \subseteq M$ gilt:

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}^\circ(X)\ .$$

$\Diamond$

Für transitivitätsvermeidende Mengen ist die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ also in Linearzeit möglich.

Wir zeigen jetzt, wie man solche Mengen finden kann.

Definition 11. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann ist $(.)^\circ : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(M))$ bezüglich $\mathfrak{G}$ definiert durch ($X \subseteq M$):

$$X^\circ := \{Y \in \mathfrak{G}(Z) \mid Z \subsetneq X,\ X \subseteq Y\}\ .$$

$\Diamond$

Hilfssatz 12 *Für* $(.)^\circ$ *bezüglich* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ *gilt* ($X \subseteq M$)

$$X^\circ \subseteq \mathfrak{G}(X)\ .$$

Dieser Umstand ist leicht einzusehen. Die Elemente von

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\mathfrak{G}) \ := \ & \{X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G} \mid X^\circ \neq \mathfrak{G}(X) \text{ oder} \\ & X \text{ minimal bezüglich } \mathfrak{G}(X) = \emptyset\} \end{aligned}$$

nennen wir **echte Prämissen**.

Satz 6 *Sei* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. *Dann ist*

$$\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}} := \{\alpha_X^{\mathfrak{G}} \mid X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G})\}$$

transitivitätsvermeidend und $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{G}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 9 ist $\mathfrak{G} \models \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$, da $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ kanonisch bezüglich $\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{G} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}})$.

Sei nun $X \subseteq M$ mit $X \models \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$. Angenommen, es wäre $X \notin \mathfrak{G}$:

Wenn $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$, dann gibt es eine minimale Menge $Z \subseteq X$ mit $\mathfrak{G}(Z) = \emptyset$, also $\alpha_Z \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ und $X \not\models \alpha_Z$, somit Widerspruch.

Wenn $\mathfrak{G}(X) \neq \emptyset$, dann betrachten wir ein $Y \in \mathfrak{G}(X)$ und ein $Z \subseteq X$ mit $Y \in \mathfrak{G}(Z)$, das bezüglich dieser Eigenschaft minimal ist. Dann ist $Z \notin \mathfrak{G}$ und jedes $W \subsetneq Z$ ist stets $Y \notin \mathfrak{G}(W)$, also $Z^\circ \neq \mathfrak{G}(Z)$. Deshalb ist $\alpha_Z \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ und $X \not\models \alpha_Z$, denn in α_Z kann es keine Konklusionsmenge $V \subseteq X$ geben, da sonst $V \subseteq X \subsetneq Y$ im Gegensatz dazu, daß $\mathfrak{G}(Z)$ Antikette ist. Also Widerspruch, daher muß $X \in \mathfrak{G}$ sein

Nun zeigen wir, daß $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ transitivitätsvermeidend ist. Sei $X \subseteq M$. Wenn $X \in \mathfrak{G}$, dann $X \models \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$, also $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X) = \{X\} = \mathfrak{G}(X) = \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}(X)$.

Sei nun $X \notin \mathfrak{G}$, also $X \not\models \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$. Wenn $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$, dann gibt es keine $Y \in \mathfrak{G}$ mit $X \subseteq Y$. Somit können solche Y auch nicht als Konklusionsmengen in $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ auftreten, also $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X) = \emptyset$.

Bleibt noch der Fall $\mathfrak{G}(X) \neq \emptyset$. Es ist zu zeigen $\mathfrak{G}(X) = \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X)$. Sei $Y \in \mathfrak{G}(X)$ und $Z \subseteq X$ sei minimal bezüglich $Y \in \mathfrak{G}(Z)$. Analog obiger Argumentation ist dann $\alpha_Z \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$, also $Y \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X)$.

Sei nun $Y \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X)$. Dann ist $Y \in \mathfrak{G}$, $X \subseteq Y$ und es gibt ein $Z \subseteq X$ mit $\alpha_Z \in \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ und $Y \in \mathfrak{G}(Z)$. Nach Hilfssatz 7 gibt es ein $W \in \mathfrak{G}(X)$ mit $W \subseteq Y$, also $Z \subseteq X \subseteq W \subseteq Y$. Aus demselben Grund gibt es $V \in \mathfrak{G}(Z)$ mit $V \subseteq W$, also $Z \subseteq V \subseteq W \subseteq Y$. Da $\mathfrak{G}(Z)$ aber Antikette ist, muß $V = W = Y$ gelten, also $Y \in \mathfrak{G}(X)$. Also ist $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}\,\circ}(X) = \mathfrak{G}(X) = \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}(X)$. □

Beispiel 7: (fortgesetzt)
Für das vorige Beipiel (S. 23) ist

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{G}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}} \;=\; & \{(a \to a, b \mid a, c),\ (b \to a, b \mid b, d),\\ & (c \to a, c \mid c, d),\ (d \to b, d \mid c, d),\\ & (a, d \to \bot),\ (b, c \to \bot)\}\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt auch, daß es keinen direkten Zusammenhang zwischen $\mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{E}(\mathfrak{G})$ gibt, denn z.B. $\{a, d\} \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G}) \setminus \mathrm{PMod}(\mathfrak{G})$ und $\{a, b, d\} \in \mathrm{PMod}(\mathfrak{G}) \setminus \mathfrak{E}(\mathfrak{G})$.

Allerdings ist $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ nicht unbedingt eine minimale transitivitätsvermeidende Menge, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 8: Wir betrachten $M := \{a, b, c\}$ und

$$\mathcal{L} := \{(a, b \to \bot),\ (c \to b, c)\}\ .$$

$\mathcal{L}$ ist transitivitätsvermeidend, aber

$$\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}} = \{(a, b \to \bot),\ (c \to b, c),\ (a, c \to \bot)\}\ .$$

Hilfssatz 13 *Sei* $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ *transitivitätsvermeidend und* $\mathfrak{G} = \mathrm{Mod}(\mathcal{L})$*. Dann ist für* $X \subseteq M$ *bezüglich* $\mathfrak{G}$*:*

$$X^\circ = \{C \mid \alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}, X \not\models \alpha, A \neq X, X \subseteq C \in \mathfrak{B}\}\ .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} X^\circ &= \{Y \in \mathfrak{G}(Z) \mid Z \subsetneq X,\ X \subseteq Y\} \\ &= \{Y \in \mathcal{L}^\circ(Z) \mid Z \subsetneq X,\ X \subseteq Y\} \\ &= \{C \mid \alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}, X \not\models \alpha, A \neq X, X \subseteq C \in \mathfrak{B}\} \end{aligned}$$

□

Dies ermöglicht den **Algorithmus zur Bestimmung von** $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$ zu einer Menge $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$:
Zu Anfang setzt man $\mathcal{L} := \emptyset$. Dann führt man für alle $X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G}$ in lektisch aufsteigender Reihenfolge folgendes durch:

Wenn $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$ und es kein $\alpha_Y^{\mathfrak{G}} \in \mathcal{L}$ gibt mit $Y \subseteq X$ und $\mathfrak{G}(Y) = \emptyset$, dann füge zu $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ zu $\mathcal{L}$ hinzu. Ansonsten ermittle man $\mathcal{L}^\circ(X)$ nach der Methode von Hilfssatz 13. Wenn $X^\circ \neq \mathfrak{G}(X)$, dann wird ebenfalls $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ zu $\mathcal{L}$ hinzugefügt.

Auf diese Weise wird $\mathcal{L}$ schrittweise erweitert. Am Ende der Berechnung ist $\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}} = \mathcal{L}$.
Beweis: (des Algorithmus)
Bezeichne Pre_X die Prämissen der kumulierten Klauseln in $\mathcal{L}$ zum Zeitpunkt nach der Abarbeitung von $X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G}$. Weiterhin sei $\mathfrak{E}_X := \{Y \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G}) \mid Y \leq X\}$. Wir zeigen nun $\mathrm{Pre}_X = \mathfrak{E}_X$ induktiv über die $X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G}$ in lektisch aufsteigender Reihenfolge.
Induktionsanfang: Sei $X = \min(\mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G})$. Falls es kein solches X gibt, gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}(M)$ und es ist überhaupt nichts zu beweisen. Wenn $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$, dann $\{X\} = \mathrm{Pre}_X = \mathfrak{E}_X$, ansonsten ist $X^\circ \neq \mathfrak{G}(X)$ und somit ebenfalls $\{X\} = \mathrm{Pre}_X = \mathfrak{E}_X$.
Induktionsschritt: Sei $X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \mathfrak{G}$ und es gelte $\mathfrak{E}_Y = \mathrm{Pre}_Y$ für $Y \subseteq M$, den lektischen Vorgänger von X in dieser Menge. $\mathfrak{E}_Y$ ist dann auch die Menge aller echten Prämissen, die bezüglich der Inklusion echt kleiner als X sind.
1. Fall: $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$.
Dann ist X deshalb bezüglich dieser Eigenschaft genau dann minimal, wenn es kein $Y \in \mathfrak{E}_Y = \mathrm{Pre}_Y$ gibt, das in X enthalten ist. In diesem Fall würde also $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ genau dann zu $\mathcal{L}$ hinzugefügt, wenn $X \in \mathfrak{E}(\mathfrak{G})$, also $\mathrm{Pre}_X = \mathfrak{E}_X$.
2. Fall: $\mathfrak{G}(X) \neq \emptyset$.
Da $\mathcal{L}$ zu diesem Zeitpunkt alle echten Prämissen enthält, die in X enthalten

sind, liefert die Anwendung der Methode von Hilfssatz 13 tatsächlich X°, nämlich bezüglich $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{G}$. $\alpha_X^{\mathfrak{G}}$ wird also genau dann zu $\mathcal{L}$ hinzugefügt, wenn eine X echte Prämisse ist, also auch in diesem Fall $\mathrm{Pre}_X = \mathfrak{E}_X$.

Somit sind die Prämissen in $\mathcal{L}$ nach Abarbeitung des Algorithmus genau die echten Prämissen, also $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{tv}^{\mathfrak{G}}$. □

10 Ableitbare Merkmale

Im folgenden wollen wir uns mit Mengensystemen $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ befassen, bei denen bereits das Auftreten von Merkmalen einer festen Menge $M_E \subseteq M$ auf die restlichen Merkmale schließen läßt. In der Praxis sind diese restlichen ableitbaren Merkmale dann auch meist als aussagenlogische Terme über den anderen Merkmalen gegeben. Der erste Teil dieses Abschnitts befaßt sich damit, welche Mengen kumulierter Klauseln solche Merkmale ausreichend charakterisieren. Im zweiten Teil wird dann angegeben, wie man solche ausreichenden Mengen konstruieren kann, und zwar für die Fälle, daß die ableitbaren Merkmale über Mengen oder aussagenlogische Terme definiert sind. Der letzte Teil erörtert Möglichkeiten, Theorien über einzelnen Teilmengen der Merkmalsmenge M zu ermitteln.

Definition 12. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $M = M_E \dot\cup M_A$ so, daß für alle $X, Y \in \mathfrak{G}$

$$X \cap M_E = Y \cap M_E \implies X = Y\ .$$

Dann nennen wir M_E eine Menge **echter Merkmale** und M_A eine Menge **ableitbarer Merkmale** ◊

Die Zerlegung von M in M_E und M_A ist im allgemeinen nicht eindeutig und ihre Wahl hängt vom Standpunkt des Betrachters ab. Meist sind die Belegungen der Merkmale auch nicht explizit gegeben, sondern in Form von Formeln über M_E. Diese Betrachtungsweise ist in Verbindung mit Kontexten ein Spezialfall der logischen Skalierung [P97, S.17].

Die Eigenschaft der Merkmale aus M_A läßt sich bei der Aufstellung eines Erzeugendensystems der Theorie von $\mathfrak{G}$ nutzen.

Definition 13. Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $M = M_E \dot\cup M_A$ so, daß M_A eine Menge ableitbarer Merkmale ist.
Dann heißt $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$ **induzierende kumulierte Klausel** für $m \in M_A$, wenn $\mathfrak{G} \models \alpha$, $A \subseteq M_E$ und $m \in B$ für alle $B \in \mathfrak{B}$.
Eine Menge induzierender kumulierter Klauseln für $m \in M_A$ ist **ausreichend**, wenn sie für alle $X \in \mathfrak{G}$ mit $m \in X$ ein $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B)$ enthält mit $A \subseteq X$.
Ein $\alpha \in \mathrm{KK}(M)$ heißt **rückwirkende kumulierte Klausel** für $m \in M_A$, wenn $\mathfrak{G} \models \alpha$ und

$$\alpha = (\bigwedge A \cup \{m\} \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \quad \text{mit } A \subseteq M_E,\ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(M_E).$$

Eine Menge rückwirkender kumulierter Klauseln für $m \in M_A$ heißt **ausreichend**, wenn sie genau von den Mengen $(X \cap M_E) \cup \{m\}$ mit $X \in \mathfrak{G}$ respektiert wird, für die $m \in X$ ist. $\Diamond$

Der folgende Satz besagt nun, daß diese ausreichenden Mengen die ableitbaren Merkmale vollständig charakterisieren.

Satz 7 *Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ und $M = M_E \dot\cup M_A$ so, daß M_A eine Menge ableitbarer Merkmale ist. Weiterhin sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ eine Menge kumulierter Klauseln, die von $\mathfrak{G}$ respektiert wird. Wenn $\mathcal{L}$ folgendes enthält:*

1. *$\mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{L}$ mit $\{X \cap M_E \mid X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}_E)\} = \{X \cap M_E \mid X \in \mathfrak{G}\}$*
2. *für alle $m \in M_A$ eine ausreichende Menge rückwirkender kumulierter Klauseln*
3. *für alle $m \in M_A$ eine ausreichende Menge induzierender kumulierter Klauseln,*

dann gilt $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \mathfrak{G}$.

Beweis: Da $\mathfrak{G}$ $\mathcal{L}$ respektiert, gilt $\mathfrak{G} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathcal{L})$. Es ist nun noch $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) \subseteq \mathfrak{G}$ zu zeigen. Sei also $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L})$. Dann gilt nach (1.), daß $X \cap M_E \in \{X \cap M_E \mid X \in \mathfrak{G}\}$, d.h. es gibt ein $Y \in \mathfrak{G}$ mit $X \cap M_E = Y \cap M_E$, und da M_E eine Menge echter Merkmale ist, muß Y eindeutig sein.

Für alle $m \in M_A$ gilt nun: Wenn $m \in Y$, dann gibt es für m eine induzierende kumulierte Klausel $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ mit $A \subseteq Y$, also auch $A \subseteq X$ und somit $m \in X$.

Wenn $m \notin Y$, dann gibt es eine rückwirkende kumulierte Klausel in $\mathcal{L}$, die von der Menge $(Y \cap M_E) \cup \{m\}$ nicht respektiert wird und somit folgt $m \notin X$. Damit erhalten wir $X = Y$, daher $X \in \mathfrak{G}$, also $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \mathfrak{G}$. $\Box$

Aus diesem Satz folgt auch, daß für ein derartiges $\mathcal{L}$ gilt: $\mathcal{L}^* = \mathrm{Th}(\mathfrak{G})$. Algorithmisch läßt sich diese Theorie durch fortgesetztes Anwenden der Ableitungsregeln (K1)–(K4) ermitteln, bis sich die Menge kumulierter Klauseln nicht mehr vergrößert.

Aus einer derartigen Theorie $\mathcal{L}^*$ erhält man durch Einschränkung auf $\mathcal{L}^* \cap \mathrm{KK}(M_A)$ die Theorie über die ableitbaren Merkmale. Allerdings muß dafür nicht komplett $\mathcal{L}^*$ bestimmt werden, wir gehen am Ende dieses Abschnitts noch einmal auf diese Thematik ein.

Betrachten wir zuvor noch die zwei Standardfälle, wie ableitbare Merkmale gegeben sind und wie die zugehörigen induzierenden und rückwirkenden kumulierten Klauseln aussehen:

Ableitbare Merkmale als Mengen gegeben:
Sei zu einem ableitbarem Merkmal $m \in M_A$ die Menge $\mathfrak{G}_m := \{X \cap M_E \mid$

$X \in \mathfrak{G},\ m \in X\}$ der zugehörigen Belegung der echten Merkmale gegeben. Eine Möglichkeit für die entsprechenden Mengen kumulierter Klauseln wäre dann:
Ausreichende Menge induzierender Klauseln:

$$\Big\{ (\bigwedge X \to m) \,\Big|\, X \in \mathfrak{G}_m \Big\}.$$

Ausreichende Menge rückwirkender Klauseln:

$$\Big\{ (\bigwedge Y \cup \{m\} \to \bigvee_{X \in \mathfrak{G}_m(Y)} \bigwedge X) \,\Big|\, Y \in \mathfrak{P}(M_E) \setminus \mathfrak{G}_m \Big\}.$$

Ableitbare Merkmale als aussagenlogische Formel gegeben:
Auch eine Sprache, die $m \in M_A$ über Verknüpfung von Merkmalen aus M_E mit $\vee, \wedge, \neg$ definiert, läßt sich in solche kumulierten Klauseln übersetzen. Sei M_E die Menge der Merkmale (also Atome der Sprache), dann sei $\overline{M}_E := \{\overline{m} \mid m \in M_E\}$ die Menge der negierten Merkmale. Diese müssen dann mit zu M_E hinzugenommen werden. Mit diesen läßt sich eine Definitionsformel für $m \in M_A$ in eine disjunktive Normalform bringen:

$$m := \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B, \quad \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(M_E \cup \overline{M}_E)$$

Zu dieser ergeben sich folgende kumulierte Klauseln:

Ausreichende Menge induzierender Klauseln:

$$\Big\{ (\bigwedge B \to m) \,\Big|\, B \in \mathfrak{B} \Big\}.$$

Ausreichende Menge rückwirkender Klauseln:

$$\Big\{ \bigwedge m \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B \Big\}$$

Zusätzliche kumulierte Klauseln für $\mathfrak{G}$:

$$\Big\{ (\emptyset \to m \vee \overline{m}) \,\Big|\, m \in M_E \Big\} \cup \Big\{ (m, \overline{m} \to \emptyset) \,\Big|\, m \in M_E \Big\}$$

Beispiel 9:
Betrachten wir

$$\begin{aligned} M_E &= \{\mathsf{warm}, \mathsf{Regen}, \mathsf{Sonne}\} \\ M_A &= \{\mathsf{gutes\_Wetter}\} \quad \text{mit} \\ \mathsf{gutes\_Wetter} &:= (\mathsf{warm} \wedge \neg\mathsf{Regen}) \vee \mathsf{Sonne} \end{aligned}$$

Dann sind die induzierenden kumulierten Klauseln für $\mathsf{gutes\_Wetter}$:

$$\mathsf{warm}, \overline{\mathsf{Regen}} \to \mathsf{gutes\_Wetter}$$
$$\mathsf{Sonne} \to \mathsf{gutes\_Wetter}\ ,$$

die rückwirkende kumulierte Klausel

$$\mathsf{gutes\_Wetter} \to \mathsf{warm}, \overline{\mathsf{Regen}} \mid \mathsf{Sonne}$$

und als zusätzliche kumulierte Klauseln ergeben sich

$$\begin{aligned}&\emptyset \to \mathsf{Regen} \mid \overline{\mathsf{Regen}}\\ &\mathsf{Regen}, \overline{\mathsf{Regen}} \to \emptyset\ .\end{aligned}$$

Außer Regen brauchen die anderen Merkmale nicht in negierter Form mit aufgenommen zu werden, da sie in der Definition für gutes_Wetter nicht auftauchen.

An dieser Stelle wollen wir auch kurz noch auf das Arbeiten mit eingeschränkten Merkmalsmengen eingehen: Mitunter interessiert man sich nur für die Zusammenhänge der Merkmale innerhalb einer festen Menge $N \subseteq M$. Wir sprechen in diesem Fall von der **Einschränkung** auf N und indizieren die entsprechenden auftretenden Symbole mit $_{|N}$.

Betrachten wir zunächst die Einschränkung von $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Da nur die Merkmale aus $N \subseteq M$ interessieren, ist es sinnvoll zu definieren:

$$\mathfrak{G}_{|N} := \{Y \cap N \mid Y \in \mathfrak{G}\}\ .$$

Der Rest folgt nun in Analogie zu den üblichen Definitionen, indem überall $\mathfrak{G}_{|N}$ verwendet wird. Zunächst eine Überlegung, wie der Operator $\mathfrak{G}_{|N}(.)$, der natürlich durch $\mathfrak{G}_{|N}$ bereits eindeutig festgelegt ist, mit Hilfe von $\mathfrak{G}(.)$ geschrieben werden kann. Für $X \subseteq N$ ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_{|N} &= \min\nolimits_{\subseteq}\{Y \in \mathfrak{G}_{|N} \mid X \subseteq \mathfrak{G}\}\\ &= \min\nolimits_{\subseteq}\{Y \cap N \mid Y \in \mathfrak{G},\ X \subseteq \mathfrak{G}\}\\ &= \min\nolimits_{\subseteq}\{Y \cap N \mid Y \in \mathfrak{G}(X)\}\ .\end{aligned}$$

Für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ ist es schwierig, eine sinnvolle eingeschränkte Entsprechung anzugeben. Wir wollen das Konstrukt $\mathcal{L}_{|N}$ nur in zwei Fällen zulassen: Als erzeugende Menge der Modellklasse

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{|N}) := \mathrm{Mod}(\mathcal{L})_{|N}$$

und in diesem Sinne als Operator für $X \subseteq N$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{|N}(X) &:= (\mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{|N}))(X)\\ &= \mathrm{Mod}(\mathcal{L})_{|N}(X)\\ &= \min\nolimits_{\subseteq}\{Y \cap N \mid Y \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L})\}\\ &= \min\nolimits_{\subseteq}\{Y \cap N \mid Y \in \mathcal{L}(X)\}\ .\end{aligned}$$

Entsprechend ist für $X \subseteq N$

$$\alpha^{\mathfrak{G}}_{X\ |N} := \alpha_X^{\mathfrak{G}_{|N}} = \left(\bigwedge X \to \bigvee_{Y \in \mathfrak{G}_{|N}} \bigwedge Y\right)\ ,$$

analog sind die eingeschränkten Pseudomodelle definiert usw. nach demselben Schema die restlichen Begriffe. Der Unterschied zu den üblichen Definitionen ist eigentlich nur der, daß überall $\mathfrak{G}_{|N}$ und $\mathcal{L}_{|N}$ verwendet wird.

Alle Sätze und Algorithmen der vorliegenden Arbeit lassen sich auf diese eingeschränkten Mengen und Operationen übertragen. Insbesondere ist dann beispielsweise $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}_{|N}}$ eine Basis für $\mathrm{Th}(\mathfrak{G}_{|N})$, d.h. für $\mathrm{Th}(\mathfrak{G}) \cap \mathrm{KK}(N)$. Dies kann ausgenutzt werden, wenn man sich sich nur für die Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{G}) \cap \mathrm{KK}(M_A)$ über den ableitbaren Merkmalen interessiert. Wir verwenden diese Methode im Beispiel in Abschnitt 18.

Beispiel 10: (fortgesetzt)
Sei wie im vorigen Beispiel $M = \{\mathsf{warm}, \mathsf{Regen}, \overline{\mathsf{Regen}}, \mathsf{Sonne}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}$ und für $\mathcal{L}$ nehmen wir alle dort aufgeführten kumulierten Klauseln. Sei nun $N := \{\mathsf{Regen}, \mathsf{Sonne}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}$. Dann ist z.B.:

$$\mathcal{L}_{|N}(\{\mathsf{gutes\_Wetter}\}) = \{\{\mathsf{gutes\_Wetter}\}\} ,$$

weil $\mathsf{gutes\_Wetter} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}_{|N})$ im Gegensatz zu

$$\mathcal{L}(\{\mathsf{gutes\_Wetter}\}) = \{\{\mathsf{warm}, \overline{\mathsf{Regen}}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}, \{\mathsf{Sonne}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}\}.$$

Trotzdem „wirken“ noch die kompletten kumulierten Klauseln aus $\mathcal{L}$, so ist beispielsweise

$$\mathcal{L}_{|N}(\{\mathsf{Regen}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}) = \{\{\mathsf{Regen}, \mathsf{Sonne}, \mathsf{gutes\_Wetter}\}\} .$$

11 Kumulierte Hornklauseln

Dieser Abschnitt befaßt sich mit dem Spezialfall der kumulierten Klauseln, daß es höchstens eine Konklusionsmenge gibt. Wir sprechen dann von kumulierten Hornklauseln. Die Ableitung solcher kumulierter Hornklauseln aus Mengen von kumulierten Klauseln ist besonders einfach. Außerdem gibt es einen Basissatz, der besagt, daß $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ für Mengen kumulierter Klauseln minimal ist.

Definition 14. Eine kumulierte Klausel $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$ heißt **kumulierte Hornklausel**, wenn $|\mathfrak{B}| \leq 1$. Dementsprechend ist

$$\mathrm{KHK}(M) := \{\alpha \in \mathrm{KK}(M) \mid \alpha \text{ ist kumulierte Hornklausel}\}$$

die **Menge der kumulierten Hornklauseln** über M. $\Diamond$

Wir schreiben zur Vereinfachung $A \to B$, wenn $|\mathfrak{B}| = 1$ und $A \to \perp$, falls $\mathfrak{B} = \emptyset$. In diesem Sinne verwenden wir im folgenden $A \to B$ mit $A \in \mathfrak{P}(M)$, $B \in \mathfrak{P}(M) \cup \{\perp\}$ als kumulierte Hornklauseln.

Die Ableitung von kumulierten Hornklauseln ist besonders einfach:

Hilfssatz 14 *Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, A, $B \subseteq M$. Dann gilt:*

1. $\mathfrak{G} \models (A \to B) \iff B \subseteq \bigcap \mathfrak{G}(A)$
2. $\mathfrak{G} \models (A \to \bot) \iff \mathfrak{G}(A) = \emptyset$

Beweis:

(1) „$\Longrightarrow$“: Sei $X \in \mathfrak{G}(A)$, d.h. $A \subseteq X$, also auch $B \subseteq X$ Somit ist $B \subseteq \bigcap \mathfrak{G}(A)$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $X \in \mathfrak{G}$. Wenn $A \not\subseteq X$, dann wird $A \to B$ von X respektiert. Wenn $A \subseteq X$, dann gibt es ein $Y \in \mathfrak{G}(A)$ mit $Y \subseteq X$. Somit ist $B \subseteq Y \subseteq X$, also auch in diesem Fall respektiert X die kumulierte Hornklausel.

(2) „$\Longrightarrow$“: Wenn $\mathfrak{G}$ die kumulierte Hornklausel $A \to \bot$ respektiert, dann gibt es kein $X \in \mathfrak{G}$ mit $A \subseteq X$, also $\mathfrak{G}(A) = \emptyset$.

„$\Longleftarrow$“: Wenn $\mathfrak{G}(A) = \emptyset$, dann gilt für alle $X \in \mathfrak{G}$: $A \not\subseteq X$, also respektiert $\mathfrak{G}$ die kumulierte Hornklausel $A \to \bot$.

□

Damit ist also die Ableitung einer kumulierten Hornklausel aus einer transitivitätsvermeidenden Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ in Linearzeit möglich (siehe dazu auch Algorithmus 8, S. 49). Da es keine Disjunktion in der Konklusion gibt, hat man:

Hilfssatz 15 *Für* $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{KHK}(M)$ *und* $X \subseteq M$ *ist* $|\mathcal{H}(X)| \leq 1$.

Aus dem gleichen Grund ist auch die Berechnung von $\mathcal{H}(.)$ in Linearzeit möglich (siehe auch Bemerkungen zu Algorithmus 9, S. 51). Weiterhin ergibt sich eine interessante Zuordnung zwischen den kumulierten Hornklauseln und den Pseudomodellen:

Hilfssatz 16 *Sei* $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{KHK}(M)$. *Wenn* $P \in \mathrm{PMod}(\mathcal{H})$, *und* $\alpha \in \mathcal{H}$ *mit* $P \not\models \alpha$ *dann* $\mathrm{PMod}(\mathcal{H}) \setminus \{P\} \models \alpha$, *d.h.* α *wird von höchstens einem Pseudomodell nicht respektiert.*

Beweis: Indirekt. Angenommen P, $Q \in \mathrm{PMod}(M)$ mit $P \neq Q$ repektieren $\alpha \in \mathcal{H}$ nicht. Sei A die Prämisse von α. Dann ist $A \subseteq P$ und $A \subseteq Q$, also $A \subseteq P \cap Q =: S$.

Wir zeigen jetzt indirekt $P \not\subseteq Q$: Angenommen es wäre $P \subseteq Q$. Wenn $\alpha = (A \to \bot)$, dann gäbe es kein Modell $X \supseteq P$ und somit wäre Q kein Pseudomodell. Wenn $\alpha = (A \to B)$, dann gilt für jedes Modell X mit $P \subseteq X$ auch $B \subseteq X$, somit $X \not\subseteq Q$, auch in diesem Fall wäre Q kein Pseudomodell. Analog folgt $Q \not\subseteq P$.

Somit ist $S \neq P$, $S \neq Q$. Nun zeigen wir, daß S ein Pseudomodell ist. Offenbar S ist kein Modell von $\mathcal{H}$, da S α nicht respektiert.

Sei $T \subseteq S$ ein Pseudomodell. Auf jeden Fall gibt es Modelle $X \supseteq T$, denn sonst wären P und Q keine Pseudomodelle (da $T \subseteq P, Q$). Für alle Modelle $X \supseteq T$ gilt aber $\mathcal{H}_{min}(T) \subseteq X$, und da $T \subseteq P$, ist $\mathcal{H}_{min}(T) \subseteq P$, analog folgt $\mathcal{H}_{min}(T) \subseteq Q$, also $\mathcal{H}_{min}(T) \subseteq S$.

Somit wäre S ein Pseudomodell von $\mathcal{H}$. Das kann aber nicht sein, denn: Wenn $\alpha = (A \to \bot)$, dann gibt es kein Modell $X \supseteq S$ und somit wären P und Q keine Pseudomodelle. Wenn $\alpha = (A \to B)$, dann gilt für jedes Modell X mit $S \subseteq X$ auch $B \subseteq X$, also $X \nsubseteq P$ und $X \nsubseteq Q$, auch in diesem Fall wären P und Q kein Pseudomodell.

Also muß die Annahme falsch sein. Da es zu jedem Pseudomodell eine kumulierte Hornklausel geben muß, die nicht respektiert wird, bleibt nur, daß es nicht P und Q zugleich geben. □

Hieraus folgt unmittelbar ein Basissatz für kumulierte Hornklauseln, wie er auch für Implikationen gilt:

Satz 8 *Sei* $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{KHK}(M)$. *Dann ist*

$$|\mathcal{H}| \geq |\,\mathrm{PMod}(\mathcal{H})| \ .$$

Diesen Sachverhalt macht man sich folgendermaßen klar: Zu jedem Pseudomodell P muß es eine kumulierte Hornklausel geben, die verhindert, daß P ein Modell ist. Der vorhergehende Hilfssatz besagt, daß dazu für jedes Pseudomodell eine andere solche kumulierte Hornklausel verwendet werden muß.

Es soll hier trotzdem noch ein zweiter Beweis angegeben werden, der auf Zurückführung auf den Basissatz für Implikationen beruht.

Beweis: Wenn $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}) = \emptyset$, dann ist $|\mathcal{H}| \geq 1$ und $\mathrm{PMod}(\mathcal{H}) = \{\emptyset\}$. Ansonsten definieren wir zu $\mathcal{H}$ eine entsprechende Implikationenmenge und können für diese den Basissatz für Implikationen verwenden. Sei

$$\begin{aligned} M' &:= M \cup \{*\}\ , \quad (* \notin M) \\ \mathcal{H}' &:= \left\{ A \to B \,\middle|\, (A \to B) \in \mathcal{H} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ A \to (M \cup \{*\}) \,\middle|\, (A \to \bot) \in \mathcal{H} \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \{*\} \to M \right\} . \end{aligned}$$

Dann gilt:

- $|\mathcal{H}'| = |\mathcal{H}| + 1$.
- $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}') = \mathrm{Mod}(\mathcal{H}) \cup \{M \cup \{*\}\}$, denn:

  Sei $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{H}')$. Falls $* \in X$, dann ist $X = \{*\} \cup M$. Wenn jedoch $* \notin X$, dann wird $\mathcal{H}$ von X respektiert, also $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{H})$.

  Wenn $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{H})$, dann wird $\mathcal{H}$ von X respektiert und somit auch $\mathcal{H}'$, also $X \in \mathrm{Mod}(\mathcal{H}')$. $\{*\} \cup M$ respektiert $\mathcal{H}'$ ebenfalls.

- $\mathrm{PMod}(\mathcal{H}') = \mathrm{PMod}(\mathcal{H}) \cup \{N \cup \{*\}\}$ mit
  $N := \mathcal{H}_{min}(\emptyset)$, denn:
  Nach obiger Aussage ist $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{P}(M) = \mathrm{Mod}(\mathcal{H}') \cap \mathfrak{P}(M)$. Da für die Definition, ob ein $P \subseteq M$ ein Pseudomodell ist, nur Mengen herangezogen werden, die Teilmengen von P sind, ist auch $\mathrm{PMod}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{P}(M) = \mathrm{PMod}(\mathcal{H}') \cap \mathfrak{P}(M)$.

  Wenn $N = \emptyset$, dann ist $\{*\}$ ein Pseudomodell von $\mathcal{H}'$. Außer $\{*\}$ kann es keine weiteren Pseudomodelle von $\mathcal{H}'$ geben, die $*$ enthalten, da $M \cup \{*\}$ das einzige Modell ist, das $*$ enthält.

  Im Fall $N \neq \emptyset$ ist $\emptyset$ ein Pseudomodell von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$. Daher kann es keine weiteren Pseudomodelle $P \subseteq N$ geben. Für alle Pseudomodelle P mit $* \in P$ ist $\emptyset \subseteq P$ und damit $N \subseteq P$. Deshalb ist $N \cup \{*\}$ ein Pseudomodell von $\mathcal{H}'$. Es kann aber auch keine größeren Pseudomodelle geben, die $*$ enthalten, da $M \cup \{*\}$ das einzige Modell ist, das $*$ enthält.

Nach [GW96, S. 84, Hilfssatz 25] muß es mindestens so viele Implikationen in $\mathcal{H}'$ geben wie $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}')$ Pseudoinhalte hat. Die Pseudoinhalte von $\mathcal{H}'$ sind jedoch genau die Pseudomodelle. Also ist $|\mathcal{H}'| \geq |\,\mathrm{PMod}(\mathcal{H}')|$ und daher $|\mathcal{H}| = |\mathcal{H}'| - 1 \geq |\,\mathrm{PMod}(\mathcal{H}')| - 1 = |\,\mathrm{PMod}(\mathcal{H})|$, somit $|\mathcal{H}| \geq |\,\mathrm{PMod}(\mathcal{H}')|$. □

Daher ist für kumulierte Hornklauseln die Menge $\mathcal{B}^{\mathcal{H}}$ nicht nur nichtredundant, sondern auch minimal.

12 Ableitung von kumulierten Hornklauseln

Mitunter interessiert man sich nur für die kumulierten Hornklauseln, die aus einer Menge von kumulierten Klauseln folgen, also für $\mathrm{KHK}(M) \cap \mathcal{L}^*$ zu einer gegebenen Menge $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$. Sicher erhält man diese Menge, indem man zunächst $\mathcal{L}^*$ bildet und dann nur die kumulierten Hornklauseln zuläßt. Es geht aber auch mit geringerem Aufwand. Dazu führen wir einen weiteren Ableitungsbegriff ein. Anschließend zeigen wir, wie man ein Erzeugendensystem für die kumulierten Hornklauseln einer Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ finden kann ($\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$).

Satz 9 *Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ abgeschlossen bezüglich*

(H1). Identität:
$(A \to A) \in \mathcal{L}$ für $A \subseteq M$.

(H2). Prämissenerweiterung:
Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$, dann $(\bigwedge A \cup C \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ für $C \subseteq M$.

(H3). Unerfüllbare kumulierte Hornklauseln:
Wenn $(A \to \bot) \in \mathcal{L}$, dann $(A \to B) \in \mathcal{L}$ für $B \subseteq M$.

(H4). Substitution:

Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B)$, $D \in \mathfrak{B}$ *und* $(A \cup D \to C) \in \mathcal{L}$, *dann* $(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}\setminus\{B\}\cup\{C\}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$.
Wenn $(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B)$, $D \in \mathfrak{B}$ *und* $(A \cup D \to \bot) \in \mathcal{L}$, *dann* $(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}\setminus\{B\}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$.

Dann gilt $\mathcal{L} \cap \mathrm{KHK}(M) = \mathcal{L}^* \cap \mathrm{KHK}(M)$.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß alle kumulierten Hornklauseln aus $\mathcal{L}^*$ schon in $\mathcal{L}$ sind.
Sei also $(X \to Y) \in \mathcal{L}^*$ $(X \subseteq M,\ Y \in \mathfrak{P}(M) \cup \{\bot\})$. Zunächst bilden wir wie in Beweis von Satz 1 eine Folge von Teilmengen von $\mathfrak{P}(M)$:

$$\{X\} = \mathfrak{X}_0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{X}_n$$

nach folgender Bildungsvorschrift: Gibt es ein $Z_i \in \mathfrak{X}_i$ das eine kumulierte Klausel $(\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ nicht respektiert, dann

$$\mathfrak{X}_{i+1} := \mathfrak{X}_i \setminus \{Z_i\} \cup \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \{B \cup Z_i\}\ .$$

Das Verfahren bricht ab, wenn $\mathfrak{X}_n \models \mathcal{L}$.

Sei nun $\overline{X} := \bigcap \mathcal{L}(X)$. Wir zeigen jetzt, daß für alle $Z \in \mathfrak{X}_i$ folgendes gilt: Wenn $\mathcal{L}(Z) \neq \emptyset$, dann ist $(Z \to \overline{X}) \in \mathcal{L}$, ansonsten $(Z \to \bot) \in \mathcal{L}$. Der Beweis erfolgt durch Induktion von $\mathfrak{X}_n$ nach $\mathfrak{X}_0$:
Induktionsanfang: Wenn $\mathcal{L}(X) = \emptyset$, dann $\mathfrak{X}_n = \emptyset$. Andernfalls gibt es nach Hilfssatz 8 für jedes $Z \in \mathfrak{X}_n$ ein $V \in \mathcal{L}(X)$ mit $V \subseteq Z$ und somit $\overline{X} \subseteq Z$. Nach (H1) ist $(\overline{X} \to \overline{X}) \in \mathcal{L}$, mit (H2) folgt $(Z \to \overline{X}) \in \mathcal{L}$.
Induktionsschritt: Für $\mathfrak{X}_{i+1}$ gelte die Behauptung. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{i+1} &= \mathfrak{X}_i \setminus \{Z_i\} \cup \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} \{B \cup Z_i\}, \quad \text{also} \\ \mathfrak{X}_i &\subseteq \mathfrak{X}_{i+1} \cup \{Z_i\}\ . \end{aligned}$$

Für die Elemente von $\mathfrak{X}_{i+1}$ gilt die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung. Also muß die Behauptung nur noch für Z_i gezeigt werden. Dazu betrachten wir die zur Bildung von $\mathfrak{X}_{i+1}$ herangezogene kumulierte Klausel $\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B$:
1. Fall: $\mathcal{L}(Z_i) \neq \emptyset$.

Dann ist $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und es gibt es $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mathcal{L}(Z_i \cup B) \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{lll} \bigwedge A \to \bigvee\limits_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B & & \\ \bigwedge Z_i \to \bigvee\limits_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B & & (\text{da } A \subseteq Z_i \text{ (H2) }) \\ Z_i \cup B \to \overline{X} \text{ oder } Z_i \cup B \to \bot & (B \in \mathfrak{B}) & (\text{da } Z_i \cup B \in \mathfrak{X}_{i+1}) \\ Z_i \to \overline{X} & & (|\mathfrak{B}|\text{mal (H4)}) \end{array}$$

2. Fall: $\mathcal{L}(Z_i) = \emptyset$.
Dann ist $\mathcal{L}(Z_i \cup B) = \emptyset$ für alle $B \in \mathfrak{B}$.

$$\begin{array}{lll}
\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B & & \\
\bigwedge Z_i \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B & & (\text{da } A \subseteq Z_i \text{ (H2) }) \\
Z_i \cup B \to \bot & (B \in \mathfrak{B}) & (\text{da } Z_i \cup B \in \mathfrak{X}_{i+1}) \\
Z_i \to \bot & & (|\mathfrak{B}|\text{mal (H4)})
\end{array}$$

Also erfüllt $\mathfrak{X}_i$ ebenfalls die Induktionsbehauptung.

Da $\mathfrak{X}_0 = \{X\}$, erfüllt auch X diese Bedingung. Wenn $\mathcal{L}(X) \neq \emptyset$ dann ist also $(X \to \overline{X}) \in \mathcal{L}$. Nach Hilfssatz 14 ist dann $Y \subseteq \overline{X}$. Da nach (H1) $(Y \to Y) \in \mathcal{L}$, folgt mit (H2) $(\overline{X} \to Y) \in \mathcal{L}$ und mit (H4) ist dann $(X \to Y) \in \mathcal{L}$.

Falls $\mathcal{L}(X) = \emptyset$, dann $(X \to \bot) \in \mathcal{L}$. Wenn nicht schon $Y = \bot$, dann folgt $(X \to Y) \in \mathcal{L}$ aus (H3). □

Der Vorteil der Ableitungsregeln (H1)–(H4) gegenüber (K1)–(K4) besteht darin, daß die Anzahl der Konklusionsmengen in den kumulierten Klauseln nicht größer werden kann. Die Armstrong-Regeln sind Spezialfälle von (H1) – (H4) und diese wiederum sind Spezialfälle der Ableitungsregeln (K1) – (K4). Bezeichne $(.)^A$ den Abschluß bezüglich der Armstrong-Regeln und $(.)^H$ den Abschluß bezüglich (H1) – (H4). Dann ist

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^A \subseteq \mathcal{L}^H \subseteq \mathcal{L}^*, \ \mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M) \ .$$

Man hat also 3 gestaffelte Ableitungskalküle.

Um eine erzeugende Menge für $\mathrm{KHK}(M) \cap \mathcal{L}^*$ zu finden, kann man einen Algorithmus verwenden, der dem zur Findung der Basis aus kumulierten Klauseln sehr ähnelt. Zu $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, sei

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) := \{\bigcap \mathfrak{C} \mid \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}, \ \mathfrak{C} \neq \emptyset\}$$

das **zugehörige Hüllensystem**.

Hilfssatz 17 *Für* $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ *und* $\alpha \in \mathrm{KHK}(M)$ *gilt*

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \models \alpha \iff \mathfrak{G} \models \alpha \ .$$

Beweis:
„$\Longrightarrow$“: Es ist $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$, wenn also $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \models \alpha$, dann auch $\mathfrak{G} \models \alpha$.
„$\Longleftarrow$“: Sei $\mathfrak{G} \models \alpha$.
1. Fall: $\alpha = (A \to \bot)$,
d.h. es gibt keine $X \in \mathfrak{G}$ mit $A \subseteq X$. Dann kann es auch kein $Y \in \mathfrak{H}(\mathfrak{G}))$ geben mit $A \subseteq Y$, da $Y = \bigcup \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}$. Also wird α von $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ respektiert.

2. Fall: $\alpha = (A \to B)$,
dann $B \subseteq \bigcap \mathfrak{G}(A)$. Da für alle $Y \in \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ und $A \subseteq Y$ stets $\bigcap \mathfrak{G}(A) \subseteq Y$ und damit $B \subseteq Y$, gilt $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) \models \alpha$. □

Da die Menge $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ alle Schnitte von $\mathfrak{G}$ enthält, ist für $X \subseteq M$ immer $|\mathfrak{H}(\mathfrak{G})(X)| \leq 1$. Somit besteht $\mathcal{B}^{\mathfrak{H}(\mathfrak{G})}$ nur aus kumulierten Hornklauseln und erzeugt so alle kumulierten Hornklauseln, die in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ und damit auch in $\mathfrak{G}$ gelten. Diese Menge ist nach Satz 8 bezüglich der kumulierten Hornklauseln auch minimal, $\mathcal{B}^{\mathfrak{H}(\mathfrak{G})}$ verdient also wirklich den Namen Basis.

Analog zum Algorithmus zur Bestimmung der Basis aus kumulierten Klauseln ergibt sich der **Algorithmus zur Bestimmung einer Basis der kumulierten Hornklauseln** von $\mathrm{Th}(\mathfrak{G})$ für $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$.
Zu Anfang setzt man $\mathcal{H} := \emptyset$. Man ermittelt nun nacheinander in lektischer Reihenfolge, beginnend beim kleinsten, alle Modelle von $\mathcal{H}$. Sobald für eines dieser Modelle X nicht $X = \bigcap \mathfrak{G}(X)$ gilt, wird die kumulierte Hornklausel $(X \to \bigcap \mathfrak{G}(X))$ (wenn $\mathfrak{G}(X) \neq \emptyset$) bzw. $(X \to \perp)$ (wenn $\mathfrak{G}(X) = \emptyset$) zu $\mathcal{H}$ hinzugefügt, und die Berechnung der Modelle wird mit der vergrößerten Menge $\mathcal{H}$ fortgesetzt.

Auf diese Weise wird $\mathcal{H}$ schrittweise erweitert. Wenn schließlich alle Modelle berechnet sind, ist $\mathcal{H}$ ein Erzeugendensystem der kumulierten Hornklauseln der Theorie von $\mathfrak{G}$.

Die Richtigkeit des Algorithmus folgt aus dem Algorithmus zur Bestimmung von $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ und aus Hilfssatz 17.

13 Optimierte Algorithmen

Im folgenden Kapitel werden noch einmal die wichtigsten Algorithmen der vorangegangenen Abschnitte in optimierter und detailierter Form vorgestellt. Dabei werden sie auch hinsichtlich ihres Aufwandes untersucht.

Die ersten beiden Algorithmen befassen sich mit der Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ bzw. $\mathcal{L}_{min}(.)$. Der Aufwand dieser Algorithmen hängt stark von der Anzahl der Konklusionsmengen der einzelnen kumulierten Klauseln ab und ist nicht polynomial. Die folgenden beiden Algorithmen geben zwei Möglichkeiten an, $\mathfrak{G}(.)$ zu ermitteln. Danach sind drei Algorithmen angegeben, die sich mit der Bestimmung von $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{B}^{\mathfrak{G}}$ befassen. Da sie den zweiten Algorithmus verwenden, sind auch diese Berechnungen nicht polynomial. Algorithmus 8 ermittelt $\mathcal{L}^{\circ}$ in linearer Zeit. Damit kann für transitivitätsvermeidende Mengen $\mathcal{L}(.)$ berechnet werden (siehe Abschnitt 9). Der letzte hier angegebene Algorithmus testet die Erfüllbarkeit einer Menge $\mathcal{H}$ von kumulierten Hornklauseln und kann auch zur Berechnung von $\mathcal{H}(.)$ verwendet werden. Auch hier ist der Aufwand linear.

Zur Angabe der Komplexitäten der Algorithmen ist es notwendig, die Mengen kumulierter Klauseln größenmäßig zu erfassen. Dazu definieren wir:

Definition 15. Sei $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathrm{KK}(M)$, dann ist

$$\sigma(\alpha) := |A| + \sum_{B\in\mathfrak{B}} |B| \; .$$

Als Erweiterung für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ sei

$$\sigma(\mathcal{L}) := \sum_{\alpha\in\mathcal{L}} \sigma(\alpha) \; .$$

◊

Zum Beispiel hat der Test, ob $X \subseteq M$ ein Modell von $\mathcal{L}$ ist, offensichtlich den Aufwand $O(\sigma(\mathcal{L}))$.

In einigen Fällen hängt die Komplexität stark davon ab, wieviele Konklusionsmengen die einzelnen kumulierten Klauseln haben. Wir definieren daher eine weitere Maßgröße für $\mathcal{L}$, die dies erfaßt:

Definition 16. Sei $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ mit $\alpha_i = (\bigwedge A_i \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}_i} \bigwedge B)$. Dann sei

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{L}) \;\; := \;\; & 1 + |\mathfrak{B}_1| + |\mathfrak{B}_1|\cdot|\mathfrak{B}_2| + |\mathfrak{B}_1|\cdot|\mathfrak{B}_2|\cdot|\mathfrak{B}_3| + \ldots \\ & \ldots + |\mathfrak{B}_1|\cdot|\mathfrak{B}_2|\cdots|\mathfrak{B}_l|, \\ & \text{wobei } |\mathfrak{B}_1| \geq |\mathfrak{B}_2| \geq |\mathfrak{B}_3| \geq \ldots \geq |\mathfrak{B}_l| \; .\end{aligned}$$

◊

Hilfssatz 18 *Für $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ und $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B\in\mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}$ gilt:*

1. $1 + |\mathfrak{B}| \cdot \pi(\mathcal{L} \setminus \{\alpha\}) \leq \pi(\mathcal{L})$.
2. $|\mathfrak{B}| + \pi(\mathcal{L} \setminus \{\alpha\}) \leq \pi(\mathcal{L})$.
3. $\sigma(\mathcal{L}) \leq |M| \cdot (|\mathcal{L}| + \pi(\mathcal{L}))$.
4. *Für alle $X \subseteq M$ gilt $|\mathcal{L}(X)| \leq \pi(\mathcal{L})|$.*

Diese Aussagen lassen sich leicht nachprüfen. Die Größe $\pi(.)$ ist sicher etwas unhandlich. Viele der folgenden Aussagen lassen sich auch mit anderen entsprechenden Maßgrößen für $\mathcal{L}$ aufstellen, z.B.

$$\rho(\mathcal{L}) := \prod_{\alpha_i\in\mathcal{L}} (|\mathfrak{B}_i| + 1) \; ,$$

Die Gültigkeit dieser abgewandelten Aussagen folgt dann in der Regel einfach aus der Tatsache, daß $\pi(\mathcal{L}) \leq \rho(\mathcal{L})$ für alle $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$.

Um im folgenden auf die Elemente linear geordneter Mengen zugreifen zu können, verwenden wir das Befehlspaar *first_in*, *next_in*, und zwar folgendermaßen: *first_in* und *next_in* sind boolesche Funktionen. Dabei weist $first\_in(x, X)$ der Variable x den kleinsten Wert aus der Menge X zu und liefert **true**, wenn $X \neq \emptyset$, ansonsten ist das Ergebnis **false**. $next\_in(x, X)$ ersetzt x durch das nächste Element von X und liefert **true**, sofern ein solches x in X existiert, sonst **false**.

13.1 Berechnung von $\mathcal{L}(.)$

Der folgende Algorithmus verwendet die Mengen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, wobei $\mathfrak{Y}$ stets lektisch geordnet ist. Neue Elemente werden also nicht einfach hinzugefügt, sondern eingeordnet. Weiterhin wird jedem Element $Y \in \mathfrak{Y}$ eine Menge $oldKK[Y]$ von Indizes kumulierter Klauseln zugeordnet (d.h. bei der praktischen Realisierung sollten die Elemente von $\mathfrak{Y}$ besser Paare $(Y, oldKK[Y])$ sein).

Algorithmus 1:

Input: $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, wobei $\alpha_i = (\bigwedge A_i \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_i} \bigwedge B)$,
$X \subseteq M$

Output: $\mathcal{L}(X)$

```
for all x ∈ M do begin
   contain[x] := ∅;
   for i := 1 to l do
      if x ∈ A_i then contain[x] := contain[x] ∪ {i};
end;
𝔛 := ∅;
𝔜 := {X}; oldKK[X] := ∅;
while first_in(Y, 𝔜) do begin
   KKused := false;
   applyingKK := 𝓛 \ (⋃_{x∉Y} contain[x]);
   applyingKK := applyingKK \ oldKK[Y];
   if first_in(i, applyingKK) then
      repeat
         oldKK[Y] := oldKK[Y] ∪ {i}
         if Y ⊭ α_i then begin
            KKused := true;
            for all B ∈ 𝔅_i do begin
               𝔜 := 𝔜 ∪ {Y ∪ B};
               oldKK[Y ∪ B] := oldKK[Y]
            end;
         end
      until KKused or not next_in(i, applyingKK);
   𝔜 := 𝔜 \ {Y};
   if not KKused then 𝔛 := 𝔛 ∪ {Y};
end;
𝓛(X) := 𝔛
```
□

Effektivität:

Dieser Algorithmus beruht aussschließlich auf dem Hilfssatz 8. Die Elemente von $\mathfrak{X}$ werden in lektisch aufsteigender Reihenfolge hinzugefügt, auf diese Weise ist $\mathcal{L}(X)$ automatisch lektisch geordnet.

Komplexität:
Die Schleife (1)–(5) wird $|M|$-mal durchlaufen, die Schleife (3)–(4) jeweils l-mal, der Aufwand in Zeile (4) ist konstant. Also ist der Aufwand für die Berechnung der $contain[x]$ insgesamt $O(|M| \cdot l)$.

Die Frage, wie oft die Schleife (8)–(25) durchlaufen wird, ist etwas schwieriger zu beantworten, denn dies hängt stark davon ab, wieviele Konklusionsmengen die einzelnen kumulierten Klauseln haben. Bezeichne $S(\mathcal{L})$ die Anzahl der Durchläufe der Schleife (8)–(25) bei der Berechnung (in Abhängigkeit von $\mathcal{L}$).
Behauptung: $S(\mathcal{L}) \leq \pi(\mathcal{L})$
Beweis: Durch vollständige Induktion über $|\mathcal{L}|$.
Induktionsanfang: Wenn $\mathcal{L} = \emptyset$, dann wird die Schleife genau einmal durchlaufen, $\pi(\emptyset) = 1$, stimmt.
Induktionsschritt: Betrachten wir den ersten Durchlauf der Schleife: Es ist dann $\mathfrak{Y} = \{X\}$. Wenn es kein $\alpha_i \in \mathcal{L}$ gibt, das X nicht respektiert (Zeile 15), ist $\mathcal{L}(X) = \{X\}$ und Algorithmus durchläuft die Schleife nur einmal, $1 \leq \pi(\mathcal{L})$ stimmt.

Sei nun $\alpha_i \in \mathcal{L}$, $Y = X \not\models \alpha_i$ (Zeile 15). Wenn $|\mathfrak{B}_i| = 0$, dann gibt es ebenfalls nur einen Durchlauf. Ansonsten erzeugt α_i genau $|\mathfrak{B}_i|$ Mengen in $\mathfrak{Y}$. $\mathcal{L}_{old} := \{\alpha_j \mid j \in oldKK[X]\}$ ist die Menge der kumulierten Klauseln, auf die X schon getestet wurde. Es ist auch $\alpha_i \in \mathcal{L}_{old}$. Die Verwendung von $oldKK$ sorgt dafür, daß für die neuen Mengen in $\mathfrak{X}$ nur noch mit $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}$ gearbeitet wird, also

$$\begin{aligned} S(\mathcal{L}) &= 1 + |\mathfrak{B}_i| \cdot S(\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}) \\ &\leq 1 + |\mathfrak{B}_i| \cdot \pi(\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &\leq 1 + |\mathfrak{B}_i| \cdot \pi(\mathcal{L} \setminus \{\alpha_i\}) \\ &\leq \pi(\mathcal{L}) \ . \end{aligned}$$

□

In den Zeilen (9)–(12) hat die Berechnung von $applyingKK$ den größten Aufwand (Zeile 10), und zwar $O(|M| \cdot l)$, also insgesamt $O(\pi(\mathcal{L}) \cdot |M| \cdot l)$ für diese Zeilen.

In einem Durchlauf der Schleife (8)–(25) wird die Schleife (13)–(22) höchstens l-mal durchlaufen. Deren Inneres hat die Komplexität $O(|\mathfrak{B}_i| \cdot |M|)$ (Zeile 15, 18) bzw. $O(|\mathfrak{B}_i| \cdot l)$ (Zeile 19), also insgesamt $O(|\mathfrak{B}_i| \cdot (|M| + l))$. Man könnte jetzt $|\mathfrak{B}_i| \leq \max\{|\mathfrak{B}_k| \mid \alpha_k \in \mathcal{L}\}$ abschätzen, und erhielte für diese Zeilen insgesamt $O(\pi(\mathcal{L}) \cdot l \cdot \max\{|\mathfrak{B}_i| \mid \alpha_i \in \mathcal{L}\} \cdot (|M| + l)\})$, es ist aber auch eine differenzierte Abschätzung möglich: Sei $\Sigma(\mathcal{L})$ die Summe der $|\mathfrak{B}_i|$ über die gesamten Durchläufe der Schleife (13)–(22).
Behauptung: $\Sigma(\mathcal{L}) \leq \pi(\mathcal{L})$
Beweis: Durch vollständige Induktion über $|\mathcal{L}|$.
Induktionsanfang: Wenn $\mathcal{L} = \emptyset$, dann wird die Schleife überhaupt nicht durchlaufen, $0 < 1 = \pi(\emptyset)$, stimmt.

Induktionsschritt: Betrachten wir den ersten Durchlauf der Schleife. Es ist dann $Y = X$. Wenn es kein $\alpha_i \in \mathcal{L}$ gibt, das X nicht respektiert (Zeile 15), ist $\mathcal{L}(X) = X$ und Algorithmus durchläuft die Schleife $|applyingKK|$-mal, d.h. $\Sigma(\mathcal{L}) = \sum_{j \in applyingKK} |\mathfrak{B}_j| \leq \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}} |\mathfrak{B}_j| \leq \pi(\mathcal{L})$. In diesem Fall gilt die Behauptung.

Sei nun $\alpha_i \in \mathcal{L}$, mit $X = Y \not\models \alpha_i$. $\mathcal{L}_{old} := \{\alpha_j \mid j \in oldKK[X]\}$ ist die Menge der kumulierten Klauseln, auf die X schon getestet wurde. Es ist auch $\alpha_i \in \mathcal{L}_{old}$. Wenn $|\mathfrak{B}_i| = 0$, dann bricht der Algorithmus nach dem Test von α_i für diese Menge X ab, also $\Sigma(\mathcal{L}) = \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}_{old}} |\mathfrak{B}_j| \leq \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}} |\mathfrak{B}_j| \leq \pi(\mathcal{L})$.

Wenn $|\mathfrak{B}_i| \neq 0$, dann erzeugt die Anwendung von α_i genau $|\mathfrak{B}_i|$ Mengen in $\mathfrak{X}$. Die Verwendung von *oldKK* sorgt dafür, daß für die neuen Mengen in $\mathfrak{X}$ nur noch mit $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}$ gearbeitet wird, also

$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathcal{L}) &= \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}_{old}} |\mathfrak{B}_j| + |\mathfrak{B}_i| \cdot \Sigma(\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}) \\
&\leq \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}_{old}} |\mathfrak{B}_j| + |\mathfrak{B}_i| \cdot \pi(\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&\leq \sum_{\alpha_j \in \mathcal{L}_{old} \setminus \{\alpha_i\}} |\mathfrak{B}_j| + \pi\left((\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_{old}) \cup \{\alpha_i\}\right) \\
&\leq \pi(\mathcal{L})\ .
\end{aligned}$$

□

Also ist der Aufwand der Zeilen (13)–(22) insgesamt $O(\pi(\mathcal{L}) \cdot (|M| + l))$. Somit ergibt sich als Komlexität für den gesamten Algorithmus

$$\begin{aligned}
& O\Big(|M| \cdot l\Big) + O\Big(\pi(\mathcal{L}) \cdot |M| \cdot l\Big) + O\Big(\pi(\mathcal{L}) \cdot (|M| + l)\Big) \\
= \;& O\Big(|M| \cdot l \cdot \pi(\mathcal{L})\Big)
\end{aligned}$$

also

$$O\Big(|M| \cdot |\mathcal{L}| \cdot \pi(\mathcal{L})\Big)\ .$$

Es gibt aber noch eine andere Variante, um die Anzahl der Durchläufe der Schleife (8)–(25) abzuschätzen: Aus $\mathfrak{Y}$ wird in jedem Durchlauf das lektisch kleinste Element Y entfernt (Zeile 23) und es werden nur lektisch größere Menge zu $\mathfrak{Y}$ hinzugefügt (Zeile 18). Also wird Y bei jedem Durchlauf echt größer, somit ist die Anzahl der Durchläufe auf $|\mathfrak{P}(M)|$ begrenzt. Dies kann bei großen Anzahlen von Konklusionsmengen deutlich weniger sein als $\pi(\mathcal{L})$.

Mit dieser Abschätzung erhält man für den Aufwand

$$\begin{aligned}
& O\Big(|M| \cdot l\Big) + O\Big(|\mathfrak{P}(M)| \cdot |M| \cdot l\Big) \\
& + O\Big(|\mathfrak{P}(M)| \cdot l \cdot \max\{|\mathfrak{B}_i| \mid \alpha_i \in \mathcal{L}\} \cdot (|M| + l)\}\Big) \\
= \;& O\Big(|\mathfrak{P}(M)| \cdot l^2 \cdot \max\{|\mathfrak{B}_i| \mid \alpha_i \in \mathcal{L}\}\Big)
\end{aligned}$$

also

$$O\Big(|\mathfrak{P}(M)| \cdot |\mathcal{L}|^2 \cdot \max\{|\mathfrak{B}_i| \mid \alpha_i \in \mathcal{L}\}\Big)\ .$$

Betrachten wir zum Schluß noch den trivialen Algorithmus: Dabei wird einfach für alle $Y \subseteq M$ mit $X \subseteq Y$ getestet, ob $Y \models \mathcal{L}$ und anschließend werden die minimalen Elemente ermittelt. Der erste Teil hat dabei somit den Aufwand $O(|\mathfrak{P}(M \setminus X)| \cdot \sigma(\mathcal{L})$, der zweite Teil $O(|\mathfrak{P}(M \setminus X)| \cdot |\mathcal{L}(X)| \cdot |M|)$. Damit ergibt sich insgesamt

$$O(|\mathfrak{P}(M \setminus X)| \cdot (\sigma(\mathcal{L}) + |\mathcal{L}(X)| \cdot |M|)) \leq O(|\mathfrak{P}(M)| \cdot |M| \cdot (|\mathcal{L}| + \pi(\mathcal{L}))\ .$$

13.2 Berechnung von $\mathcal{L}_{min}(.)$

Der folgende Algorithmus verwendet die Menge $\mathfrak{Y}$, die stets als lektisch geordnet verstanden werden soll. Es wird wieder jedem $Y \in \mathfrak{Y}$ ein $oldKK[X] \subseteq \mathcal{L}$ zugeordnet.

Algorithmus 2:

Input: $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, wobei $\alpha_i = (\bigwedge A_i \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_i} \bigwedge B)$,
$X \subseteq M$

Output: $\mathcal{L}_{min}(X)$

for *all* $x \in M$ **do begin**
  $contain[x] := \emptyset$;
  for i **to** l **do**
    if $x \in A_i$ **then** $contain[x] := contain[x] \cup \{i\}$;
end;
$\mathfrak{Y} := \{X\}$; $oldKK[X] := \emptyset$;
repeat
  $KKused :=$ **false;**
  if not $first\_in(Y, \mathfrak{Y})$ **then begin**
    $Y := \emptyset$; $applyingKK := \emptyset$
  end else begin
    $applyingKK := \mathcal{L} \setminus \big(\bigcup_{x \notin Y} contain[x]\big)$;
    $applyingKK := applyingKK \setminus oldKK[Y]$
  end;
  if $first\_in(i, applyingKK)$ **then**
    repeat
      $oldKK[Y] := oldKK[Y] \cup \{i\}$
      if $Y \not\models \alpha_i$ **then begin**
        $KKused :=$ **true;**
        for *all* $B \in \mathfrak{B}_i$ **do begin**
          $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y} \cup \{Y \cup B\}$;

(22) $oldKK[Y \cup B] := oldKK[Y]$
(23) **end;**
(24) **end**
(25) **until** $KKused$ **or not** $next\_in(i, applyingKK)$;
(26) $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y} \setminus \{Y\}$;
(27) **until not** $KKused$;
(28) $\mathcal{L}_{min}(X) := \mathfrak{X}$ □

Effektivität:
Daß dieser Algorithmus tatsächlich $\mathcal{L}_{min}(X)$ liefert, ist relativ einfach einzusehen; er ist eine leichte Abwandlung von Algorithmus 1. Es gilt stets $\forall U \in \mathcal{L}(X)\ \exists V \in \mathfrak{Y} : \ V \subseteq U$, also $V \leq U$. Das letzte Y in Zeile (28) ist lektisch minimal in $\mathfrak{Y}$ und respektiert $\mathcal{L}$, d.h. $Y \in \mathcal{L}(X)$ und $\forall U \in \mathcal{L}(X)\ \exists V \in \mathfrak{Y} : \ V \leq U$, also $Y \leq V \leq U$. Daher ist $\mathcal{L}_{min}(X) = Y$.

Komplexität:
Der Aufwand ist derselbe wie bei Algorithmus 1, also

$$O\Big(|M| \cdot |\mathcal{L}| \cdot \pi(\mathcal{L})\Big) \ .$$

13.3 Berechnung von $\mathfrak{G}(.)$, direkt

Der folgende Algorithmus verwendet die Menge $\mathfrak{X}$ ungeordnet.

Algorithmus 3:
Input: $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, $X \subseteq M$
Output: $\mathfrak{G}(X)$

$\mathfrak{X} := \emptyset$;
if $first\_in(Y, \mathfrak{G})$ **then**
repeat
if $X \subseteq Y$ **then begin**
$stop :=$ **false;**
if $first\_in(Z, \mathfrak{X})$ **then**
repeat
if $Z \subseteq Y$ **then** $stop :=$ **true;**
if $Z \supsetneq Y$ **then** $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \setminus \{Z\}$;
until $stop$ **or not** $next\_in(Z, \mathfrak{X})$;
if not $stop$ **then** $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cup \{Y\}$;
end;
until not $next\_in(Y, \mathfrak{G})$;
$\mathfrak{G}(X) := \mathfrak{X}$ □

Effektivität:
Dieser Algorithmus ist lediglich eine algorithmische Darstellung der Definition von $\mathfrak{S}(.)$. Wenn $\mathfrak{S}$ lektisch aufsteigend geordnet ist, kann die Zeile (9) entfallen.

Komplexität:
Wir geben die Komplexität für den Fall an, daß $\mathfrak{S}$ lektisch aufsteigend geordnet ist. Dies spielt für den Algorithmus keine Rolle, wohl aber für den Aufwand. Die Schleife (2)–(13) wird $|\mathfrak{S}|$-mal durchlaufen, der Vergleich in (4) hat den Aufwand $O(|M|)$. Da nach obiger Bemerkung die Zeile (9) entfallen kann, wird die Menge $\mathfrak{X}$ immer nur vergrößert, also wird die Schleife (6)–(10) bei einem Durchlauf von (2)–(13) höchstens $|\mathfrak{S}(X)|$-mal durchlaufen. Deren Inneres hat den Aufwand $O(|M|)$. Somit beläuft sich der Gesamtaufwand auf

$$O(|\mathfrak{S}| \cdot |\mathfrak{S}(X)| \cdot |M|) \leq O(|\mathfrak{S}|^2 \cdot |M|)$$

($O(|\mathfrak{S}|^2 \cdot |M|)$ ist auch der Aufwand des Algorithmus mit unsortierter Menge $\mathfrak{S}$).

13.4 Berechnung von $\mathfrak{S}(.)$, Sieb des Eratosthenes

Der folgende Algorithmus verwendet die lektisch geordnete Menge $\mathfrak{Y}$.

Algorithmus 4:
Input: $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, $X \subseteq M$
Output: $\mathfrak{S}(X)$

(1) $\mathfrak{Y} := \mathfrak{S}$; $\mathfrak{X} := \emptyset$;
(2) **if** $first\_in(Y, \mathfrak{Y})$ **then**
(3) **repeat**
(4) **if** $X \not\subseteq Y$ **then** $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y} \setminus \{Y\}$;
(5) **until not** $next\_in(Y, \mathfrak{Y})$;
(6) **while** $first\_in(Y, \mathfrak{Y})$ **do begin**
(7) **while** $next\_in(Z, \mathfrak{Y})$ **do**
(8) **if** $Y \subseteq Z$ **then** $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y} \setminus \{Z\}$;
(9) $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cup \{Y\}$;
(10) **end**;
(11) $\mathfrak{S}(X) := \mathfrak{X}$ □

Effektivität:
Nach den Zeilen (1)–(5) ist $\mathfrak{Y} = X\uparrow$ und damit $\mathfrak{S}(X) = \min_{\subseteq}(\mathfrak{Y})$. Für das kleinste Element $Y \in \mathfrak{Y}$ gilt $Y \not\subset Z$ für $Z \in \mathfrak{Y}$, also $Y \in \mathfrak{S}(X)$. Außerdem ist $Z \notin \mathfrak{S}(X)$ für $Y \subsetneq Z$, diese Mengen können aus $\mathfrak{Y}$ entfernt werden. In der neuen Menge $\mathfrak{Y}'$ gibt es wieder ein kleinstes Element Y', für das $Y' \not\subset Z$ für $Z \in \mathfrak{Y}'$ und $Y < Y'$, $Y \not\subseteq Y'$. Also $Y' \in \mathfrak{S}(X)$, usw.

Komplexität:
Der Aufwand ist wie bei Algorithmus 3

$$O(|\mathfrak{S}| \cdot |\mathfrak{S}(X)| \cdot |M|) \leq O(|\mathfrak{S}|^2 \cdot |M|)\ .$$

13.5 Berechnung von $X \oplus i$, so daß i maximal bezüglich $X < X \oplus i$

Im folgenden sei o.B.d.A. $M = \{1, 2, \ldots n\}$ und $M_k := \{k, k+1, \ldots n\}$ für $k \in M$.

Algorithmus 5:
Input: $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, wobei $\alpha_i = (\bigwedge A_i \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_i} \bigwedge B)$, $X \subseteq M$
Output: $(X \oplus i, i)$, so daß i maximal bezüglich $X < X \oplus i$ ist, bzw. $(\emptyset, 0)$, wenn es kein solches i gibt.

(1) **for** *all* $i \in M \setminus X$ **do**
(2) $\quad \mathcal{L}[j] := \emptyset;$
(3) **for** *all* $\alpha_j \in \mathcal{L}$ **do begin**
(4) $\quad$ **if not** $first\_in(k, A_j \setminus X)$ **then** $k := |M|;$
(5) $\quad$ **for** $i := 1$ **to** k **and** $i \notin X$ **do begin**
(6) $\quad\quad \mathfrak{X} := \emptyset;$
(7) $\quad\quad$ **forall** $B \in \mathfrak{B}_j$ **do**
(8) $\quad\quad\quad$ **if** $B \subseteq M_i \cup X$ **then** $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cup \{B \cap M_i\};$
(9) $\quad\quad \mathcal{L}[i] := \mathcal{L}[i] \cup (\bigwedge A_j \cap M_j \to \bigvee_{C \in \mathfrak{X}} \bigwedge C);$
(10) $\quad$ **end;**
(11) **end;**
(12) $i := |M| + 1;$
(13) **repeat**
(14) $\quad i := i - 1;$
(15) $\quad$ **if** $i \notin X$ **then begin**
(16) $\quad\quad Y := (X \setminus M_i) \cup \{i\};$
(17) $\quad\quad Y := (\mathcal{L}[i]_{min})(Y);$ *(Verwendung von Algorithmus 2)*
(18) $\quad$ **end;**
(19) **until** $Y \neq \emptyset$ **or** $i = 1;$
(20) **if** $Y = \emptyset$ **then** $i := 0;$
(21) $(X \oplus i, i) := (Y, i)$ □

Effektivität:
Dieser Algorithmus beruht auf dem Hilfssatz 8. Die Einschränkung auf die verschiedenen Klauselmengen gewährleistet, daß für $Y \in \mathrm{Mod}(\mathcal{L}[i])$ stets $X <_i Y$ und $Y \models \mathcal{L}$ gilt. Auf diese Weise wird der Aufwand beim Berechnen von $\mathcal{L}_{min}$ verringert.

Komplexität:
Der Aufwand der Zeilen (1)–(2) ist $O(|M|)$. Die Schleife (3)–(11) wird l-mal durchlaufen, der Aufwand der Zeile (4) ist $O(|M|)$. Die Zeilen (5)-(10) werden für jedes $\alpha_i \in \mathcal{L}$ höchstens $|M|$-mal durchlaufen, somit ist der Aufwand für die Zeilen (6), (7) und (9) insgesamt $O(l \cdot |M|^2)$.

Die Zeile (8) wird für jedes $B \in \mathfrak{B}_i$ (i = 1 ...l) höchstens $|M|$-mal durchlaufen, der Aufwand beträgt dabei jeweils $O(|B|)$. Damit ergibt sich also $O(|M| \cdot \sum_{i=1}^{l} \sum_{B \in \mathfrak{B}_i} |B|)$.

Die Schleife (13)–(19) wird höchstens $|M|$-mal durchlaufen, den größten Aufwand in ihrem Inneren hat die Zeile (17) mit Berechnung von $\mathcal{L}[i]_{min}(Y)$ mit $O(|M_i| \cdot |\mathcal{L}[i]| \cdot |\pi(\mathcal{L}[i])|)$ (siehe Algorithmus 2). Diese Werte lassen sich sehr schlecht abschätzen, auf jeden Fall gilt aber $|\mathcal{L}[i]| \leq |\mathcal{L}|$ und $|\pi(\mathcal{L}[i])| \leq |\pi(\mathcal{L})|$. Somit hat der zweite Teil des Algorithmus einen Aufwand von $O(|M|^2 \cdot |\mathcal{L}| \cdot |\pi(\mathcal{L})|)$. Damit ergibt sich insgesamt

$$O(|M|) + O(l \cdot |M|^2) + O\Big(|M| \cdot \sum_{i=1}^{l} \sum_{B \in \mathfrak{B}_i} |B|\Big) + O(|M|^2 \cdot |\mathcal{L}| \cdot |\pi(\mathcal{L})|) \ .$$

Aus Hilfssatz 18 (2.) folgt $\sum_{i=1}^{l} \sum_{B \in \mathfrak{B}_i} |B| \leq |M| \cdot \pi(\mathcal{L})$, also ist der Aufwand für den Algorithmus 5

$$O(|M|^2 \cdot |\mathcal{L}| \cdot |\pi(\mathcal{L})|) \ .$$

Dies ist leider auch der Aufwand des entsprechenden trivialen Algorithmus, bei dem man einfach für alle $i \in M$ die Menge $A \oplus i$ berechnet. Für kleine Mengen dürfte Algorithmus 5 trotzdem günstiger sein.

13.6 Berechnung von Mod($\mathcal{L}$)

Algorithmus 6:
Input: $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$
Output: $\mathrm{Mod}(\mathcal{L})$

(1) $\mathfrak{X} := \emptyset$;
(2) $A = \mathcal{L}_{min}(\emptyset)$;
(3) **if** $A \models \mathcal{L}$ **then** $i := 1$ **else** $i := 0$;
(4) **while** $i \neq 0$ **do begin**
(5) $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cup \{A\}$;
(6) $(A, i) := \begin{cases} (A \oplus i, i), & \textit{wenn } \exists i \textit{ maximal bezüglich } A < A \oplus i \\ (\emptyset, 0), & \textit{sonst} \end{cases}$;
(Verwendung von Algorithmus 5)
(7) **end;**
(8) $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) := \mathfrak{X}$; □

Effektivität:
Es handelt sich hierbei lediglich um eine exaktere Fassung des Algorithmus aus Abschnitt 6.

Komplexität:
Im wesentlichen besteht der Algorithmus aus $|\operatorname{Mod}(\mathcal{L})|$ Aufrufen des Algorithmus 5. Daher der Aufwand dieses Algorithmus

$$O(|M|^2 \cdot |\mathcal{L}| \cdot |\pi(\mathcal{L})| \cdot |\operatorname{Mod}(\mathcal{L})|) \ .$$

Der triviale Algorithmus, bei dem einfach für alle $X \subseteq M$ getestet wird, ob $X \models \mathcal{L}$, hat den Aufwand $O(|\mathfrak{P}(M)| \cdot \sigma(\mathcal{L}))$.

13.7 Berechnung von $\operatorname{Th}(\mathfrak{G})$

Algorithmus 7:
Input: $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{P}(M)$
Output: $\mathcal{L} \subseteq \operatorname{KK}(M)$ Erzeugendensystem für $\operatorname{Th}(\mathfrak{G})$

(1) $\mathcal{L} := \emptyset$; $A := \emptyset$;
(2) **repeat**
(3) **if** $A \notin \mathfrak{G}$ **then** $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \alpha_A^{\mathfrak{G}}$;
(4) $(A, i) := \begin{cases} (A \oplus i, i), & \textit{wenn } \exists i \textit{ maximal bezüglich } A < A \oplus i \\ (\emptyset, 0), & \textit{sonst} \end{cases}$;
(Verwendung von Algorithmus 5)
(5) **until** $i = 0$; □

Effektivität:
Es handelt sich hierbei lediglich um eine exaktere Fassung des Algorithmus aus Abschnitt 8.

Komplexität:
Eine gute Abschätzung anzugeben ist hier relativ schwierig, da man die Werte für $\mathcal{L}$ schlecht erfassen kann. Der Form halber soll hier eine grobe Abschätzung angegeben werden.

Die Schleife (2)–(5) wird höchstens $|\mathfrak{G}| + |\operatorname{PMod}(\mathfrak{G})|$ mal durchlaufen. Außerdem ist $|\mathcal{L}| \leq |\operatorname{PMod}(\mathfrak{G})|$.

Über $\pi(\mathcal{L})$ kann man noch weniger sagen. Sei $\kappa(\mathfrak{G})$ die maximale Länge einer Antikette in $\mathfrak{G}$. Dann gilt die grobe Abschätzung $O(\pi(\mathcal{L})) \leq O(\kappa(\mathfrak{G})^{|\mathcal{L}|})$. Insgesamt ergibt sich so ein Aufwand von

$$O((|\mathfrak{G}| + |\operatorname{PMod}(\mathfrak{G})|) \cdot |M|^2 \cdot |\operatorname{PMod}(\mathfrak{G})| \cdot \kappa(\mathfrak{G})^{|\operatorname{PMod}(\mathfrak{G})|}) \ .$$

13.8 Berechnung von $\mathcal{L}^\circ(.)$

Algorithmus 8:
Input: $\mathcal{L} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \operatorname{KK}(M)$, wobei $\alpha_i = (\bigwedge A_i \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}_i} \bigwedge B)$,
$X \subseteq M$
Output: $\mathcal{L}^\circ(X)$

(1) $\mathfrak{X} := \emptyset;$
(2) $holdsInL :=$ **true**; $isEmpty :=$ **false**;
(3) $i := 1;$
(4) **while** $i \leq l$ **and not** $isEmpty$ **do begin**
(5)   **if** $A_i \subseteq X$ **then begin**
(6) $\mathfrak{Y} := \emptyset;$
(7) $holds :=$ **false**;
(8)   **if not** $first\_in(B, \mathfrak{B}_i)$ **then**
(9) $isEmpty :=$ **true**
(10)   **else**
(11)   **repeat**
(12)   **if** $X \subseteq B$ **then** $\mathfrak{Y} := \mathfrak{Y} \cup \{B\};$
(13)   **if** $X \supseteq B$ **then** $holds :=$ **true**;
(14)   **until** $holds$ **or not** $next\_in(B, \mathfrak{B}_i);$
(15)   **if not** $holds$ **then begin**
(16) $holdsInL :=$ **false**;
(17) $\mathfrak{X} := \mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y};$
(18)   **end**;
(19)   **end**
(20) $i := i + 1;$
(21) **end**;
(22) **if** $holdsInL$ **then** $\mathfrak{X} := \{X\};$
(23) $\mathcal{L}^\circ(X) := \mathfrak{X}$ □

Effektivität:
Dieser Algorithmus verwendet lediglich die Definition von $\mathcal{L}^\circ(.)$. Die Variable $isEmpty$ darf nur verwendet werden, wenn $\mathcal{L}$ transitivitätsvermeidend ist.

Komplexität:
Die Schleife (4)–(21) wird für jedes $\alpha_i \in \mathcal{L}$ höchstens einmal durchlaufen, also ergibt sich für die Zeilen (4), (6)–(10) und (15)–(21) der Aufwand $O(l)$. Für Zeile (5) ist der Aufwand dementsprechend $O(\sum_{i=1}^{l} |A_i|)$ und für die Zeilen (11)-(14) $O(\sum_{i=1}^{l} \sum_{B \in \mathfrak{B}_i} |B|)$. Somit ergibt sich insgesamt

$$O(l) + O\Big(\sum_{i=1}^{l} |A_i|\Big) + O\Big(\sum_{i=1}^{l} \sum_{B \in \mathfrak{B}_i} |B|\Big)$$

und da $l \leq \sigma(\mathcal{H})$ (außer in Trivialfällen), ist der Aufwand für Algorithmus 8

$$O(\sigma(\mathcal{H})) \ .$$

13.9 Erfüllbarkeit von kumulierten Hornklauseln

Der folgende Algorithmus ist im wesentlichen eine Erweiterung des Algorithmus zur Horn-Erfüllbarkeit aus [DG84].

Es wird wieder jedem $m \in M$ eine Menge $contain[m]$ von Indizes kumulierter Hornklauseln zugeordnet. Außerdem gibt es zu jedem m eine boolesche Variable $val[m]$, die an gibt, ob $(\emptyset \to m) \in \mathcal{H}^*$ und zu jeder kumulierten Hornklausel einen Zähler $numargs$, der angibt, für wieviele Elemente der Prämisse zum aktuellen Zeitpunkt $val =$ **false** ist.

Algorithmus 9:

Input: $\mathcal{H} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subseteq \mathrm{KHK}(M)$, wobei $\alpha_i = (A \to_i B_i)$ mit $A \subseteq M$, $B \in \mathfrak{P}(M) \cup \{\perp\}$

Output: $consistent :=$ **true**, wenn $\mathcal{H}$ erfüllbar, sonst **false**

```
L := ∅;
for all m ∈ M do begin
   contain[m] := ∅;
   val[m] := false
end;
for i := 1 to l do begin
   numargs[i] := |A_i|;
   if numargs[i] = 0 then L := L ∪ {i};
   for all m ∈ A_i do
      contain[m] := contain[m] ∪ {m}
end;
consistent := true;
while first_in(i, L) and consistent do
   if B_i = ⊥ then
      consistent := false
   else begin
      for all m ∈ B_i do
         if val[m] = false then begin
            val[m] := true;
            for all j ∈ contain[m] do begin
               numargs[j] := numargs[j] − 1;
               if numargs[j] = 0 then L := L ∪ {j};
            end;
         end;
      L := L \ {i};
   end;
```
□

Effektivität:

Sei $X := \{m \in M \mid val(m) = \textbf{true}\}$. Zu Anfang ist $X = \emptyset$. Der Algorithmus erweitert X schrittweise, bis $X = \mathcal{H}(\emptyset)$ gilt, denn dann ist $\mathcal{H}$ erfüllbar, oder er auf eine kumulierte Hornklausel in $\mathcal{H}$ stößt, die von X nicht respektiert wird, dann ist $\mathcal{H}$ nicht erfüllbar.

In $\mathcal{L}$ befinden sich die Indizes der kumulierten Hornklauseln aus $\mathcal{H}$, deren Prämisse für das gegenwärtige X erfüllt ist und die noch nicht in der Schleife (13)–(26) abgearbeitet wurden. In dieser Schleife werden die Elemente der Konklusion einer solchen kumulierten Hornklausel zu X hinzugenommen, sofern sie nicht schon in X enthalten sind. Weiterhin wird geprüft, ob Prämissen anderer kumulierter Hornklausel dadurch erfüllt werden, diese werden zu $\mathcal{L}$ hinzugenommen.

Wenn $\mathcal{L}$ zu einem Zeitpunkt leer ist, dann $X \models \mathcal{H}$, also $\mathcal{H}$ erfüllbar.

Komplexität:
Die Schleife (2)–(5) wird genau $|M|$ mal durchlaufen, ihr Inhalt hat konstanten Aufwand, also ist der Aufwand für diese Zeilen $O(|M|)$. Für die Zeilen (7)–(11) ergibt sich ein Aufwand von $O(\sum_{i=1}^{l} |A_i|)$.

Die Schleife (13)–(26) wird für jedes $\alpha_i \in \mathcal{H}$ höchstens einmal durchlaufen. Somit ergibt sich für die Zeilen (13)–(16) $O(l)$ und für die Zeilen (17)-(18) $O(\sum_{i=1}^{l} |B_i|)$.

Die Zeilen (19)–(23) können für jedes $m \in M$ höchstens einmal durchlaufen werden, somit ergibt sich als Aufwand $O(\sum_{m \in M}(1 + contain[m])) = O(|M| + \sum_{m \in M} contain[m]) \leq O(|M| + \sum_{i=1}^{l} |A_i|)$.

Damit ergibt sich für den gesamten Algorithmus

$$O(|M|) + O\Big(\sum_{i=1}^{l} |A_i|\Big) + O(l) + O\Big(\sum_{i=1}^{l} |B_i|\Big) + O\Big(|M| + \sum_{i=1}^{l} |A_i|\Big) ,$$

und da $|M| \leq \sigma(\mathcal{H})$ und $l \leq \sigma(\mathcal{H})$ (außer in Trivialfällen), ist der Aufwand für Algorithmus 9

$$O(\sigma(\mathcal{H})) .$$

Nach dem Durchlauf des Algorithmus ist $X := \{m \in M \mid val(m) = \mathbf{true}\}$ das kleinste Modell von $\mathcal{H}$, sowohl lektisch als auch bezüglich Inklusion. Auf diese Weise kann man zu einem gegebenen $A \subseteq M$ bequem $\mathcal{H}(A)$ berechnen: Man prüft, ob $\mathcal{H} \cup \{(\emptyset \to A)\}$ erfüllbar ist. Wenn ja, dann ist $\mathcal{H}(A) = \{\{m \in M \mid val(m) = \mathbf{true}\}\}$, ansonsten ist $\mathcal{H}(A) = \emptyset$. Der Aufwand dafür ist $O(|A| + \sigma(\mathcal{H}))$, also linear.

14 Einordnung in Komplexitätsklassen

Unabhängig von den vorgestellten Algorithmen kann man die Berechnungen mit kumulierten Klauseln in die üblichen Komplexitätsklassen einordnen. Die Frage, ob eine Menge $\mathcal{L}$ kumulierter Klauseln überhaupt erfüllbar ist (KK-SAT), ist *NP*-vollständig. Das Prüfen, ob eine kumulierte Hornklausel aus $\mathcal{L}$ ableitbar ist, ist hingegen *coNP*-vollständig. Die Berechnung von $\mathcal{L}(.)$ ist *coNP*-hart. In den Anwendungen kommen meist nur wenige „echte“ kumulierte Klauseln vor, die meisten sind kumulierte Hornklauseln. Es stellt sich daher die Frage, der Ableitung einer kumulierten Hornklausel aus einer Menge kumulierter Klauseln, bei der die Menge der „echten“ kumulierten Klauseln in gewisser Weise beschränkt ist. Dieses Problem ist in Polynomzeit lösbar.

Problem 1: KK-SAT
Eingabe: $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$
Frage: Gibt es ein $X \subseteq M$, das $\mathcal{L}$ respektiert ?

Satz 10 *Problem 1 ist NP-vollständig.*

Beweis: Ein Algorithmus kann in linearer Zeit ein $X \subseteq M$ raten und prüfen, ob $\mathcal{L}$ von X respektiert wird; also liegt dieses Problem in *NP*.

Weiterhin läßt sich SAT auf dieses Problem reduzieren: Sei M eine Variablenmenge und α eine aussagenlogische Formel über M in disjunktiver Normalform, d.h. (sei $\overline{M} := \{\overline{m} \mid m \in M\}$):

$$\alpha = \bigwedge A_1 \vee \bigwedge A_2 \vee \ldots \vee \bigwedge A_k, \quad A_i \subseteq M \cup \overline{M} \text{ für } i = 1 \ldots k$$

SAT fragt nun, ob es eine Belegung $\varphi : M \to \{0, 1\}$ gibt, so daß $\varphi(\alpha) = 1$. Betrachten wir nun die folgende Menge kumulierter Klauseln über $M' := M \cup \overline{M}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \; := \; & \{\emptyset \to \bigwedge A_1 \vee \bigwedge A_2 \vee \ldots \vee \bigwedge A_k\} \\ & \cup \{\emptyset \to m \vee \overline{m} \mid m \in M\} \\ & \cup \{m \wedge \overline{m} \to \emptyset \mid m \in M\} \end{aligned}$$

und die Frage, ob es ein $X' \subseteq M'$ gibt, das dieses $\mathcal{L}$ respektiert.

Wenn es solch X' gibt, dann erfüllt die Belegung

$$\varphi(m) := \begin{cases} 1, & m \in X' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Formel α.

Gibt es umgekehrt eine Belegung φ für M mit $\varphi(\alpha) = 1$, dann respektiert $X' := \{m \mid \varphi(m) = 1\}$ die Menge $\mathcal{L}$.

Somit kann SAT über Problem 1 entschieden werden. Da das Aufstellen von $\mathcal{L}$ in polynomieller Zeit möglich ist, denn M und somit auch $\mathcal{L}$ sind durch die Größe von α beschränkt, muß Problem 1 *NP*-vollständig sein. □

Das Problem KHK-Sat, bei dem man nur kumulierte Hornklauseln betrachtet, ist linear, da man es mit Algorithmus 9 entscheiden kann. Für eine transitivitätsvermeidende Menge ist diese Frage ebenfalls linear, da man die Erfüllbarkeit aus $\mathcal{L}(\emptyset)$ entscheiden kann.

Problem 2: Ableitung kumulierter Hornklauseln
Eingabe: $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, $(A \to B) \in \mathrm{KHK}(M)$
Frage: Ist $(A \to B) \in \mathcal{L}^*$?

Hilfssatz 19 *Problem 2 ist coNP-vollständig.*

Beweis: Ein $X \subseteq M$, das $\mathcal{L}$ respektiert aber nicht $A \to B$, kann erraten und in linearer Zeit auf diese Eigenschaft geprüft werden. In diesem Fall wäre $A \to B$ *nicht* ableitbar, das Problem liegt also in *coNP*.

Um die Vollständigkeit zu zeigen, führen wir das Komplementärproblem von KK-SAT auf Problem 2 zurück: Sei $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ und wir fragen, ob $\mathcal{L}$ *nicht* erfüllbar ist. Wenn $(\emptyset \to \bot) \in \mathcal{L}$, dann ist $\mathcal{L}$ nicht erfüllbar, wenn $(\emptyset \to \bot) \notin \mathcal{L}$, dann ist $\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ und somit $\mathcal{L}$ erfüllbar. Also läßt sich dieses Komplementärproblem über die Ableitbarkeit der kumulierten Hornklausel $\emptyset \to \bot$ entscheiden. Da KK-SAT *NP*-vollständig ist, muß Problem 2 somit *coNP*-vollständig sein □

Die Ableitung kumulierter Hornklauseln aus einer Menge kumulierter Hornklauseln ist nach den Anmerkungen zu Algorithmus 9 linear.

Problem 3: Berechnung von $\mathcal{L}(.)$
Eingabe: $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$, $X \subseteq M$
Frage: Was ist $\mathcal{L}(X)$?

Hilfssatz 20 *Problem 3 ist coNP-hart.*

Beweis: Durch Reduktion von Problem 2 auf Problem 3, denn aus der Kenntnis von $\mathcal{L}(A)$ kann man nach Hilfssatz 14 sofort entscheiden, ob $(A \to B) \in \mathcal{L}^*$. □

Für eine transitivitätsvermeidene Menge $\mathcal{L}$ ist dieses Problem jedoch (wie bereits mehrfach erwähnt) linear. Bei Anwendungen, besonders der Merkmalsexploration, hat man es gewöhnlich mit Mengen kumulierter Klauseln zu tun, die hauptsächlich aus kumulierten Hornklauseln bestehen; man hat also nur eine beschränkte Menge kumulierte Klauseln mit mehr als einer Konklusionsmenge. Desweiteren wird meist auch nur die Ableitbarkeit kumulierter Hornklauseln gefragt. Dieses Problem ist „glücklicherweise“ in Polynomzeit entscheidbar:

Problem 4: Ableitung kumulierter Hornklauseln bei beschränktem $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$
Eingabe: $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ mit $\pi(\mathcal{L}) \leq n$, $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{KHK}(M)$, $(A \to B) \in \mathrm{KHK}(M)$
Frage: Ist $(A \to B) \in (\mathcal{L} \cup \mathcal{H})^*$?

Hilfssatz 21 *Problem 4 läßt sich in*

$$O\Big(|M| \cdot (|\mathcal{L}| + |\mathcal{H}|) \cdot |\mathcal{H}|)\Big)$$

entscheiden.

Beweis: Wir betrachten $\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \mathcal{H}$ als Menge von kumulierten Klauseln. Da die kumulierten Klauseln aus $\mathcal{H}$ höchstens eine Konklusionsmenge haben, ist $\pi(\mathcal{L}') \leq \pi(cL) \cdot |\mathcal{H}| \leq n|\mathcal{H}|$.

Somit ist die Berechnung von $\mathcal{L}'(A)$ nach Algorithmus 1 mit einem Aufwand von

$$\begin{aligned} & O\Big(|M| \cdot |\mathcal{L}'| \cdot \pi(\mathcal{L}')\Big) \\ \leq \ & O\Big(|M| \cdot (|\mathcal{L}| + |\mathcal{H}|) \cdot n|\mathcal{H}|\Big) \\ = \ & O\Big(|M| \cdot (|\mathcal{L}| + |\mathcal{H}|) \cdot |\mathcal{H}|\Big) \end{aligned}$$

möglich und somit das gefragte Problem entscheidbar, denn nach Hilfssatz 14 ist aus der Kenntnis von $\mathcal{L}'(A)$ sofort entscheidbar, ob $(A \to B) \in \mathcal{L}'^*$. □

Dies ist der bei der Anwendung häufigste Fall, es entstehen meist nur wenige „echte“ kumulierte Klauseln.

15 Kumulierte Klauseln und Kontexte

Ein **formaler Kontext** $\mathbb{K} := (G, M, I)$ besteht aus zwei Mengen G (genannt **Gegenstände**) und M (genannt **Merkmale**) sowie einer Relation $I \subseteq G \times M$ („Gegenstand hat Merkmal“) (siehe dazu [GW96]). Solche Kontexte eignen sich hervorragend zur Repräsentation von Teilmengen von M bzw. von Modellklassen von Mengen kumulierter Klauseln über M. Die Gegenstände $g \in G$ werden dabei mit ihrer Ausprägung g^I als Modelle aufgefaßt. Umgekehrt eignen sich die kumulierten Klauseln, um die inneren Abhängigkeiten der Gegenstände eines Kontextes zu untersuchen. Dazu können Kontexten beschreibende Mengen kumulierter Klauseln zugeordnet werden. Im zweiten Teil des Abschitts werden die Zusammenhänge zwischen den Kontextkonstruktionen Direkte Summe und Halbprodukt und den beschreibenden Mengen untersucht. An einem Beispiel werden diese in Verbindung mit der Skalierung mehrwertiger Kontexte demonstriert.

Zunächst ein kleines Beispiel zu Kontexten und kumulierten Klauseln generell:

Beispiel 11: (Rotkäppchen)
Wir setzen $M := \{\mathsf{Tier}, \mathsf{Mensch}, \mathsf{Wohnt\_im\_Wald}, \mathsf{Rote\_Kappe}\}$. und verwenden dafür die Abkürzungen $\{t, m, ww, rk\}$. Die Menge kumulierter Klauseln sei:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ := \ & \{(\emptyset \to t \mid m),\ (t, m \to \bot) \\ & (\emptyset \to ww \mid rk),\ (ww, rk \to \bot) \\ & (rk \to m)\} \end{aligned}$$

	t	m	ww	rk
Wolf	×		×	
Großmutter		×	×	
Rotkäppchen		×		×

Als Modelle ergeben sich:

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{L}) = \{\{t, ww\}, \{m, ww\}, \{m, rk\}\} \ .$$

Eine Menge von kumulierten Klauseln $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{KK}(M)$ nennen wir **beschreibende Menge** für den Kontext (G, M, I), wenn die Modellklasse von $\mathcal{L}$ genau die Menge der Ausprägungen der Gegenstände G ist, d.h. wenn

$$\forall X \subseteq M: \ X \models \mathcal{L} \iff \exists g \in G: g^I = X \ .$$

Eine solche beschreibende Menge ist z.B.

$$\mathcal{L} \ := \ \{(\bigwedge A \to \bigvee_{g \in A^I} \bigwedge g^I) \mid A \subseteq M\} \ ,$$

diese Menge ist aber in der Regel sehr redundant. Für spezielle, häufiger genutzte Kontexte (Elementar- und Standardskalen) werden deshalb in den folgenden Abschnitten deutlich kleiner beschreibende Mengen aufgelistet.

Betrachten wir zuvor jedoch, wie sich aus den beschreibenden Mengen zweier Kontexte eine entsprechende beschreibende Menge für die direkte Summe und das Halbprodukt der Kontexte konstruieren läßt. Seien dazu $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathrm{KK}(M_1)$ eine beschreibende Menge von $\mathbb{K}_1 = (G_1, M_1, I_1)$ und $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathrm{KK}(M_2)$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_2 = (G_2, M_2, I_2)$. Dabei sei o.B.d.A. $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M := M_1 \cup M_2$.

Direkte Summe:
Die direkte Summe ist definiert durch

$$\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2 := (G_1 \cup G_2,\ M_1 \cup M_2,\ I_1 \cup I_2 \cup (G_1 \times M_2) \cup (G_2 \times M_1)) \ .$$

Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \ := \ & \Big((\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \setminus \{\alpha \in \mathrm{KK}(M) \mid \alpha = (\bigwedge A \to \emptyset)\}\Big) \\ & \cup \{(\bigwedge A \to \bigwedge M_1) \mid (\bigwedge A \to \emptyset) \in \mathcal{L}_1\} \\ & \cup \{(\bigwedge A \to \bigwedge M_2) \mid (\bigwedge A \to \emptyset) \in \mathcal{L}_2\} \\ & \cup \{(\emptyset \to \bigwedge M_1 \mid \bigwedge M_2)\} \\ & \cup \{(M \to \bot) \mid M_1 \not\models \mathcal{L}_1 \text{ und } M_2 \not\models \mathcal{L}_2)\} \end{aligned}$$

Hilfssatz 22 *Sei $\mathcal{L}_1$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_1$ und $\mathcal{L}_2$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_2$. Dann ist $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$.*

Beweis: Offensichtlich respektieren die Gegenstandsinhalte von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ die kumulierten Klauseln in $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Es ist also nur noch zu zeigen, daß die Modelle von $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ auch Gegenstandsinhalte von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$ sind.

Sei $X \subseteq M_1 \cup M_2$ und $X \models \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Wenn $X = M_1 \cup M_2$, dann gilt $M_1 \models \mathcal{L}_1$ oder $M_2 \models \mathcal{L}_2$, also enthalten $\mathbb{K}_1$ oder $\mathbb{K}_2$ eine Vollzeile. Somit ist $M_1 \cup M_2$ tatsächlich ein Gegenstandsinhalt von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$.

Ansonsten sei o.b.d.A $X \cap M_1 \neq M_1$. Nach $(\emptyset \to \bigwedge M_1 \vee \bigwedge M_2)$ ist dann $M_2 \subseteq X$.

Wir zeigen jetzt, daß $\mathcal{L}_1$ von $X \cap M_1$ respektiert wird: Sei $\alpha = (\bigwedge A \to \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge B) \in \mathcal{L}_1$. Wenn $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, dann ist $\alpha \in \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ und somit $X \models \alpha$, also $(X \cap M_1) \models \alpha$. Wenn $\mathfrak{B} = \emptyset$, dann ist $(\bigwedge A \to \bigwedge M_1) \in \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Da X diese kumulierte Klausel respektiert und $X \cap M_1 \neq M_1$, muß $A \not\subseteq X$ sein, also respektiert $X \cap M_1$ auch in diesem Fall α.

Also wird $\mathcal{L}_1$ von $X \cap M_1$ respektiert und ist somit Gegenstandsinhalt von $\mathbb{K}_1$. Daher ist X ein Gegenstandsinhalt von $\mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$.

$\square$

Halbprodukt:
Das Halbprodukt zweier Kontexte ist

$$\mathbb{K}_1 \between \mathbb{K}_2 := (G_1 \times G_2, M_1 \cup M_2, \nabla)$$

mit

$$g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2, m \in M_i\colon\ (g_1, g_2)\nabla m \ :\Longleftrightarrow\ g_i I_i m \quad (i = 1, 2).$$

Hilfssatz 23 *Sei $\mathcal{L}_1$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_1$ und $\mathcal{L}_2$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_2$. Dann ist $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ beschreibende Menge für $\mathbb{K}_1 \between \mathbb{K}_2$.*

Beweis: Für ein $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ist

$$(g_1, g_2)^{\nabla} = g_1^{I_1} \cup g_2^{I_2} \ .$$

Es ist klar, daß diese Mengen von $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ beschrieben werden und umgekehrt.

$\square$

Diese Eigenschaft ist besonders interessant für abgeleitete Kontexte, die durch Skalieren aus mehrwertigen Kontexten abgeleitet wurden [GW96, S.36]. Wenn die Skalenkontexte $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, $\ldots \mathbb{K}_n$ alle durch Mengen von kumulierten Klauseln $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\ldots \mathcal{L}_n$ beschrieben sind, dann repräsentiert $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{L}_n$ das Hintergrundwissen des skalierten Kontextes. Dieses verhindert Gegenstandsinhalte, die keinen Skalenwerten zugeordnet werden können.

Beispiel 12: (Fahrprüfung)
Die drei Merkmale des mehrwertigen Kontextes seien $\{t, p, g\}$, wobei t die theoretisch, p die praktische Prüfung bezeichnet und g für das Gesamtergebnis steht. Die Merkmale besitzen jeweils zwei mögliche Ausprägungen, und zwar b für „bestanden“ und n für „nicht bestanden“. Die Prüfung gilt als bestanden, wenn beide Teile bestanden wurden. Daraus resultiert unten abgebildeter mehrwertiger Kontext.

„Bestanden“ und „nicht bestanden“ bilden ein gegensätzliches Paar, man würde also mit der dichotomen Skala (siehe Abbildung unten und S. 62) skalieren. Eine beschreibende Menge dieser Skala für das Merkmal $x \in \{t, p, g\}$ ist

$\mathcal{L}_x = \{(\emptyset \to x \mid \overline{x}), (x, \overline{x} \to \bot)\}$. Der abgeleitete Kontext sieht dann folgendermaßen aus:

	t	p	g
1	n	n	n
2	b	n	n
3	n	b	n
4	b	b	b

Mehrwertiger Kontext.

	x	$\overline{x}$
n		×
b	×	

Dichotome Skala.

	t	$\overline{t}$	p	$\overline{p}$	g	$\overline{g}$
1		×		×		×
2	×			×		×
3		×	×			×
4	×		×		×	

Abgeleiteter Kontext.

Wenn wir nun eine beschreibende Menge für diesen Kontext suchen, dann schränkt das Hintergrundwissen $\mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_g$ die möglichen Zeilenbelegungen schon auf die 8 von der Skalierung her möglichen Fälle ein. Es sind also zusäzlich nur noch kumulierten Klauseln notwendig, die den tatsächlichen „Informationsgehalt“ beschreiben. In diesem Fall reichen dazu die beiden kumulierten Klauseln $(t \wedge p \to g)$ und $(g \to t \wedge p)$ (was auch der erwarteten Antwort entspricht: „Die Prüfung ist dann und nur dann bestanden, wenn beide Teile bestanden sind.“). Die Menge $\mathcal{L} = \{(t, p \to g),\ (g \to t, p)\} \cup \mathcal{L}_t \cup \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_g$ ist also eine beschreibende Menge des skalierten Kontextes.

16 Basen kumulierter Klauseln für Elementarskalen

Zum Skalieren von mehrwertigen Kontexten werden häufig sogenannte Elementarskalen verwendet (Definitionen siehe [GW96, S.42 ff.]). Wir wollen hier für diese Skalenkontexte beispielhaft die kumulierten Klauselbasen der Gegenstandsinhalte angeben.

$\mathcal{B}$ ist die mit Hilfe von Pseudomodellen erstellte Basis aus Abschnitt 7 und $\mathcal{L}_{tv}$ die transitivitätsvermeidende Menge mit echten Prämissen aus Abschnitt 9. $\mathcal{O}$ sei jeweils eine **optimale beschreibende Menge**, d.h. für $\mathcal{O}$ ist $\sigma(\mathcal{O})$ minimal unter den beschreibenden Mengen. Diese Mengen kumulierter Klauseln können laut Hilfssatz 23 direkt zur Konstruktion einer beschreibenden Menge des skalierten Kontextes verwendet werden.

Im folgenden sei $\mathbf{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Die hier angegebenen Mengen und Formeln sind erst ab $n > 1$ sinnvoll.

Nominalskalen. $\mathbb{N}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, =)$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathbb{N}_n} &= \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{i \in \mathbf{n}} i)\Big\} \cup \Big\{(i \wedge j \to \bot) \,\Big|\, i, j \in \mathbf{n}, i \neq j\Big\} \\ \mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{N}_n} &= \mathcal{O}^{\mathbb{N}_n} = \mathcal{B}^{\mathbb{N}_n} \end{aligned}$$

Für diese Mengen kumulierter Klauseln ist

$$|\mathcal{B}^{\mathbb{N}_n}| = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \qquad \sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{N}_n}) = n^2$$

Beispiel 13: Wir betrachten $\mathbb{N}_4$:

$\mathbb{N}_4 =$

	1	2	3	4
1	×			
2		×		
3			×	
4				×

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{\mathbb{N}_4} = \ & \{(\emptyset \to 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4),\ (1,2 \to \bot),\ (1,3 \to \bot),\\ & (1,4 \to \bot),\ (2,3 \to \bot),\ (2,4 \to \bot),\ (3,4 \to \bot)\}\ .\end{aligned}$$

Ordinalskalen. $\mathbb{O}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq)$
Sei $M_i := \{j \in \mathbf{n} | i \leq j\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{\mathbb{O}_n} &= \Big\{(\emptyset \to n)\Big\} \cup \Big\{(i \wedge n \to \bigwedge M_i) \,\Big|\, i \in \mathbf{n}, i < n-1\Big\}\\ \mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{O}_n} &= \Big\{(\emptyset \to n)\Big\} \cup \Big\{(i \to \bigwedge M_i) \,\Big|\, i \in \mathbf{n}, i < n\Big\}\\ \mathcal{O}^{\mathbb{O}_n} &= \Big\{(\emptyset \to n)\Big\} \cup \Big\{(i \to i+1) \,\Big|\, i \in \mathbf{n}, i < n-1\Big\}\end{aligned}$$

Für diese Mengen kumulierter Klauseln ergibt sich

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}^{\mathbb{O}_n}| &= n-1 & \sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{O}_n}) &= 1 + \frac{(n-2)(n+7)}{2}\\ |\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{O}_n}| &= n & \sigma(\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{O}_n}) &= 1 + \frac{(n-1)(n+4)}{2}\\ |\mathcal{O}^{\mathbb{O}_n}| &= n-1 & \sigma(\mathcal{O}^{\mathbb{O}_n}) &= 2n-3\end{aligned}$$

Beispiel 14: Wir betrachten $\mathbb{O}_4$:

$\mathbb{O}_4 =$

	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×	×	×
3			×	×
4				×

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{\mathbb{O}_4} &= \{(\emptyset \to 4),\ (1,4 \to 1,2,3,4),\ (2,4 \to 2,3,4)\}\\ \mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{O}_4} &= \{(\emptyset \to 4),\ (1 \to 1,2,3,4),\ (2 \to 2,3,4),\ (3 \to 3,4)\}\\ \mathcal{O}^{\mathbb{O}_4} &= \{(\emptyset \to 4),\ (1 \to 2),\ (2 \to 3)\}\end{aligned}$$

Interordinalskalen. $\mathbb{I}_n := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \mid (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \geq)$
Zur Unterscheidung der Merkmale der beiden Teilkontexte verwenden wir die Symbole ${}_{\leq}i$ für das Merkmal „kleiner gleich i" und ${}_{\geq}i$ für das Merkmal „größer gleich i". Bei den folgenden Kontexten wird mit analogen Bezeichnern gearbeitet. Sei $M_i := \{{}_{\leq}i,\ {}_{\leq}(i+1),\ \ldots,\ {}_{\leq}n,\ {}_{\geq}1,\ {}_{\geq}2,\ \ldots,\ {}_{\geq}i\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\mathbb{I}_n} &= \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{i\in\mathbf{n}} \bigwedge M_i)\Big\} \\
&\quad \cup \Big\{(\bigwedge M_i \cup \{{}_{\leq}j\} \to \bot) \;\Big|\; i,j \in \mathbf{n},\ {}_{\leq}j \notin M_i\Big\} \\
&\quad \cup \Big\{(\bigwedge M_i \cup \{{}_{\geq}j\} \to \bot) \;\Big|\; i,j \in \mathbf{n},\ {}_{\geq}j \notin M_i\Big\} \\
\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{I}_n} &= \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{i\in\mathbf{n}} \bigwedge M_i)\Big\} \cup \Big\{({}_{\leq}i \wedge {}_{\geq}j \to \bot) \;\Big|\; i,j \in \mathbf{n},\ i < j\Big\} \\
\mathcal{O}^{\mathbb{I}_n} &= \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{i\in\mathbf{n}} ({}_{\leq}i \wedge {}_{\geq}i))\Big\} \\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \to {}_{\leq}(i+1)) \;\Big|\; i \in \mathbf{n},\ i \neq n\Big\} \\
&\quad \cup \Big\{({}_{\geq}i \to {}_{\geq}(i-1)) \;\Big|\; i \in \mathbf{n},\ i \neq 1\Big\} \\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \wedge {}_{\geq}(i+1) \to \bot) \;\Big|\; i \in \mathbf{n}, i \neq n\Big\}
\end{aligned}
$$

Für die Kardinalität und σ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}^{\mathbb{I}_n}| &= 1 + (n-1)^2 & \sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{I}_n}) &= n^3 + n^2 - 2n + 2 \\
|\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{I}_n}| &= 1 + \frac{n(n-1)}{2} & \sigma(\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{I}_n}) &= 2n^2 \\
|\mathcal{O}^{\mathbb{I}_n}| &= 3n - 2 & \sigma(\mathcal{O}^{\mathbb{I}_n}) &= 8n - 6
\end{aligned}
$$

Beispiel 15:
Für $\mathbb{I}_4$ ist

$\mathbb{I}_4 =$

	$_{\leq}1$	$_{\leq}2$	$_{\leq}3$	$_{\leq}4$	$_{\geq}1$	$_{\geq}2$	$_{\geq}3$	$_{\geq}4$
1	×	×	×	×	×			
2		×	×	×	×	×		
3			×	×	×	×	×	
4				×	×	×	×	×

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\mathbb{I}_4} = \{&(\emptyset \to {}_{\leq}1, {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1 \mid {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2 \mid {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3 \mid \\
&\quad {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3, {}_{\geq}4), \\
&({}_{\leq}1, {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2 \to \bot),\ ({}_{\leq}1, {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}3 \to \bot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& ({}_{\leq}1, {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}4 \to \bot),\ ({}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3 \to \bot),\\
& ({}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}4 \to \bot),\ ({}_{\leq}1, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3 \to \bot),\\
& ({}_{\leq}1, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3, {}_{\geq}4 \to \bot),\ ({}_{\leq}2, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3, {}_{\geq}4 \to \bot),\\
& ({}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3, {}_{\geq}4 \to \bot)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{I}_4} &= \{(\emptyset \to {}_{\leq}1, {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1 \mid {}_{\leq}2, {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2 \mid {}_{\leq}3, {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3 \mid \\
&\quad {}_{\leq}4, {}_{\geq}1, {}_{\geq}2, {}_{\geq}3, {}_{\geq}4),\\
&\quad ({}_{\leq}1, {}_{\geq}2 \to \bot),\ ({}_{\leq}1, {}_{\geq}3 \to \bot),\ ({}_{\leq}1, {}_{\geq}4 \to \bot),\\
&\quad ({}_{\leq}2, {}_{\geq}3 \to \bot),\ ({}_{\leq}2, {}_{\geq}4 \to \bot),\ ({}_{\leq}3, {}_{\geq}4 \to \bot)\}\\
\mathcal{O}^{\mathbb{I}_4} &= \{(\emptyset \to {}_{\leq}1, {}_{\geq}1 \mid {}_{\leq}2, {}_{\geq}2 \mid {}_{\leq}3, {}_{\geq}3 \mid {}_{\leq}4, {}_{\geq}4),\\
&\quad ({}_{\leq}1 \to {}_{\leq}2),\ ({}_{\leq}2 \to {}_{\leq}3),\ ({}_{\leq}3 \to {}_{\leq}4),\\
&\quad ({}_{\geq}2 \to {}_{\geq}1),\ ({}_{\geq}3 \to {}_{\geq}2),\ ({}_{\geq}4 \to {}_{\geq}3),\\
&\quad ({}_{\leq}1, {}_{\geq}2 \to \bot),\ ({}_{\leq}2, {}_{\geq}3 \to \bot),\ ({}_{\leq}3, {}_{\geq}4 \to \bot)\}
\end{aligned}
$$

Biordinalskalen. $\mathbb{M}_{n,m} := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \leq) \dot\cup (\mathbf{m}, \mathbf{m}, \geq)$
Sei $M_i := \{{}_{\leq}i, {}_{\leq}(i+1), \ldots, {}_{\leq}n\}$ und $N_i := \{{}_{\geq}(n+1), {}_{\geq}(n+2), \ldots, {}_{\geq}i\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\mathbb{M}_{n,m}} &= \Big\{(\emptyset \to {}_{\leq}n \vee {}_{\geq}(n+1))\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \wedge {}_{\leq}n \to \bigwedge M_i) \Bigm| i \in \mathbf{n}, i < n-1\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\geq}(n+1) \wedge {}_{\geq}i \to \bigwedge N_i) \Bigm| n+2 < i < n+m\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \wedge {}_{\geq}(n+1) \to \bot) \Bigm| i \in n\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}n \wedge {}_{\geq}i \to \bot) \Bigm| n < i < n+m\Big\}\\
\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{M}_{n,m}} &= \Big\{(\emptyset \to {}_{\leq}n \vee {}_{\geq}(n+1))\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \to \bigwedge M_i) \Bigm| i \in \mathbf{n}, i < n\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\geq}i \to \bigwedge N_i) \Bigm| n+1 < i \leq n+m\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \wedge {}_{\geq}j) \to \bot) \Bigm| i \in n, n < j \leq n+m\Big\}\\
\mathcal{O}^{\mathbb{M}_{n,m}} &= \Big\{(\emptyset \to {}_{\leq}n \vee {}_{\geq}(n+1))\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}i \to {}_{\leq}(i+1) \Bigm| i \in \mathbf{n}, i < n\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\geq}i \to {}_{\geq}(i-1) \Bigm| n+1 < i \leq n+m\Big\}\\
&\quad \cup \Big\{({}_{\leq}n \wedge {}_{\geq}(n+1) \to \bot)\Big\}
\end{aligned}
$$

Für diese Menge ergeben sich folgende Werte:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}^{\mathbb{M}_{n,m}}| &= 2n + 2m - 3 \\
\sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{M}_{n,m}}) &= \frac{n(n+9)}{2} + \frac{m(m+9)}{2} - 14 \\
|\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{M}_{n,m}}| &= (m+1)(n+1) - 2 \\
\sigma(\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{M}_{n,m}}) &= \frac{n(n+3)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} + 2mn - 2 \\
|\mathcal{O}^{\mathbb{M}_{n,m}}| &= m + n \qquad \sigma(\mathcal{O}^{\mathbb{M}_{n,m}}) = 2m + 2n
\end{aligned}
$$

Beispiel 16:
Für $\mathbb{M}_{4,3}$ ist

$\mathbb{M}_{4,3} =$

	≤ 1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	≥ 5	≥ 6	≥ 7
1	×	×	×	×			
2		×	×	×			
3			×	×			
4				×			
5					×		
6					×	×	
7					×	×	×

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\mathbb{M}_{4,3}} = \{ & (\emptyset \to {\leq}4 \mid {\geq}5),\ ({\leq}1, {\leq}4 \to {\leq}1, {\leq}2, {\leq}3, {\leq}4), \\
& ({\leq}2, {\leq}4 \to {\leq}2, {\leq}3, {\leq}4),\ ({\geq}5, {\geq}7 \to {\geq}5, {\geq}6, {\geq}7), \\
& ({\leq}1, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}2, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}3, {\geq}5 \to \bot), \\
& ({\leq}4, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}4, {\geq}6 \to \bot),\ ({\leq}4, {\geq}7 \to \bot)\} \\
\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{M}_{4,3}} = \{ & (\emptyset \to {\leq}4 \mid {\geq}5),\ ({\leq}1 \to {\leq}1, {\leq}2, {\leq}3, {\leq}4),\ ({\leq}2 \to {\leq}2, {\leq}3, {\leq}4), \\
& ({\leq}3 \to {\leq}3, {\leq}4),\ ({\geq}6 \to {\geq}5, {\geq}6),\ ({\geq}7 \to {\geq}5, {\geq}6, {\geq}7), \\
& ({\leq}1, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}1, {\geq}6 \to \bot),\ ({\leq}1, {\geq}7 \to \bot),\ ({\leq}2, {\geq}5 \to \bot), \\
& ({\leq}2, {\geq}6 \to \bot),\ ({\leq}2, {\geq}7 \to \bot),\ ({\leq}3, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}3, {\geq}6 \to \bot), \\
& ({\leq}3, {\geq}7 \to \bot),\ ({\leq}4, {\geq}5 \to \bot),\ ({\leq}4, {\geq}6 \to \bot),\ ({\leq}4, {\geq}7 \to \bot)\} \\
\mathcal{O}^{\mathbb{M}_{4,3}} = \{ & (\emptyset \to {\leq}4, {\geq}5),\ ({\leq}1 \to {\leq}2),\ ({\leq}2 \to {\leq}3),\ ({\leq}3 \to {\leq}4), \\
& ({\geq}6 \to {\geq}5),\ ({\geq}7 \to {\geq}6),\ ({\leq}4, {\geq}5 \to \bot)\}
\end{aligned}
$$

Dichotome Skala. $\mathbb{D} := (\{0,1\}, \{0,1\}, =)$
Die dichotome Skala ist ein Spezialfall der Nominalskala und der Biordinalskala.

$$
\mathcal{B}^{\mathbb{D}} = \Big\{ (\emptyset \to 0 \vee 1),\ (0 \wedge 1 \to \bot) \Big\}
$$

$$\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{D}} \;=\; \mathcal{O}^{\mathbb{D}} \;=\; \mathcal{B}^{\mathbb{D}}$$

Beispiel 17:

$\mathbb{D} =$

	0	1
0	×	
1		×

Kontranominalskalen. $\mathbb{N}_n^c := (\mathbf{n}, \mathbf{n}, \neq)$
Sei $N_i := \{j \in \mathbf{n} \mid i \neq j\}$.

$$\mathcal{B}^{\mathbb{N}_n^c} \;=\; \Big\{(\bigwedge \emptyset \to \bigvee_{i\in\mathbf{n}} \bigwedge N_i),\; (\bigwedge_{i\in\mathbf{n}} \{i\} \to \emptyset)\Big\}$$

$$\mathcal{L}_{tv}^{\mathbb{N}_n^c} \;=\; \mathcal{B}^{\mathbb{N}_n^c}$$

Für diese Menge kumulierter Klauseln gilt:

$$|\mathcal{B}^{\mathbb{N}_n^c}| \;=\; 2 \qquad \sigma(\mathcal{B}^{\mathbb{N}_n^c}) \;=\; n^2$$

Beispiel 18: Wir betrachten $\mathbb{N}_4^c$:

$\mathbb{N}_4^c =$

	1	2	3	4
1		×	×	×
2	×		×	×
3	×	×		×
4	×	×	×	

$$\mathcal{B}^{\mathbb{N}_4^c} \;=\; \{(\emptyset \to 2,3,4 \mid 1,3,4 \mid 1,2,4 \mid 1,2,3),\; (1,2,3,4 \to \bot)\}\ .$$

17 Beschreibende Menge für Standardskalen

Sei $\mathbf{P} := (P, \leq)$ eine beliebige geordnete Menge. Dann kann man unter Verwendung von $\mathbf{P}$ die verschiedensten Skalen konstruieren. Es ist allerdings ziemlich schwierig, wenn nicht gar unmöglich, allgemeine Formeln für $\mathcal{B}$, $\mathcal{L}_{tv}$ oder $\mathcal{O}$ anzugeben, weil dabei die Struktur von $\mathbf{P}$ sehr stark mit eingeht. Es sollen hier zumindest beschreibende Mengen für die wichtigsten dieser Standardskalen angegeben werden. Sei $\prec$ die zu $\mathbf{P}$ gehörige Nachbarschaftsrelation, für zwei unvergleichbare Elemente a, $b \in P$ schreiben wir $a \| b$.

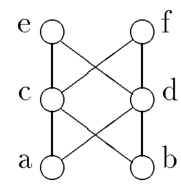
Allgemeine Ordinalskala. $\mathbb{O}_{\mathbf{P}} := (P, P, \leq)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathbb{O}_{\mathbf{P}}} &= \Big\{(a \to \bigwedge_{a \prec b} b) \;\Big|\; a \in P \setminus \max(P)\Big\} \cup \Big\{(\emptyset \to \bigvee \max(P)\Big\} \\ &\quad \cup \Big\{(a \wedge b \to \bigvee \max(a{\downarrow} \cap b{\downarrow}) \;\Big|\; a, b \in P,\ a \| b\Big\}\end{aligned}$$

Beispiel 19: Sei $(P, \leq)$ eine geordnete Menge mit 6 Elementen und dem nebenstehenden Liniendiagramm.

$\mathbb{O}_{\mathbf{P}} =$

	a	b	c	d	e	f
a	×		×	×	×	×
b		×	×	×	×	×
c			×		×	×
d				×	×	×
e					×	
f						×



$(P, \leq)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathbb{O}_{\mathbf{P}}} &= \{(a \to c, d),\ (b \to c, d),\ (c \to e, f),\ (d \to e, f),\ (\emptyset \to e \mid f), \\ &\quad (a, b \to \bot),\ (c, d \to a \mid b),\ (e, f \to c \mid d)\}\end{aligned}$$

Kontraordinalskala. $\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}} := (P, P, \not\geq)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}}} &= \Big\{(a \to \bigwedge_{a \prec b} b) \;\Big|\; a \in P \setminus \max(P)\Big\} \cup \Big\{(\min(P) \to \bot)\Big\} \\ &\quad \cup \Big\{(\bigwedge \min(P \setminus A{\downarrow}) \to \bigvee_{a \in A} \bigwedge P \setminus a{\downarrow}) \;\Big|\; A \subseteq P, A \text{ Antikette}\Big\}\end{aligned}$$

Beispiel 20: Wir verwenden dieselbe geordnete Menge wie im vorhergehenden Beispiel.

$\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}} =$

	a	b	c	d	e	f
a		×	×	×	×	×
b	×		×	×	×	×
c				×	×	×
d			×		×	×
e						×
f					×	

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathbb{O}^{cd}_{\mathbf{P}}} &= \{(a \to c, d),\ (b \to c, d),\ (c \to e, f),\ (d \to e, f),\ (a, b \to \bot), \\ &\quad (c, d \to a \mid b),\ (e, f \to c \mid d),\ (\emptyset \to e \mid f)\}\end{aligned}$$

Ein Spezialfall der Kontraordinalskala ist der Kontext $(\mathfrak{P}(S), \mathfrak{P}(S), \not\supseteq)$ für eine beliebige Menge S. Wegen $A \not\supseteq B \iff B \cap (S \setminus A) \neq \emptyset$ ist dieser Kontext isomorph zu $(\mathfrak{P}(S), \mathfrak{P}(S), \Delta)$ mit $X\Delta Y \;:\Longleftrightarrow\; (X \cap Y) \neq \emptyset$. Für diesen ergibt sich als beschreibende Menge:

$$\mathcal{L} \;=\; \Big\{(A \to \bigvee_{a\in A}\{a\}) \;\Big|\; A \subseteq S,\ |A| \neq 1\Big\} \cup \Big\{(\{a\} \to \bigwedge_{a\in B\subseteq S} B) \;\Big|\; a \in S\Big\}$$

Allgemeine Interordinalskala. $\mathbb{I}_{\mathbf{P}} := (P, P, \leq) \mid (P, P, \geq)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathbb{I}_{\mathbf{P}}} \;=\; & \Big\{(_{\leq}a \to \bigwedge_{a\prec b} {}_{\leq}b) \;\Big|\; a \in P \setminus \max(P)\Big\} \\
& \cup \Big\{(_{\geq}a \to \bigwedge_{a\succ b} {}_{\geq}b) \;\Big|\; a \in P \setminus \min(P)\Big\} \\
& \cup \Big\{(_{\leq}a \wedge {}_{\leq}b \to \bigvee_{c\in\max(a\downarrow\cap b\downarrow)} {}_{\leq}c) \;\Big|\; a, b \in P,\ a\|b\Big\} \\
& \cup \Big\{(_{\geq}a \wedge {}_{\geq}b \to \bigvee_{c\in\min(a\uparrow\cap b\uparrow)} {}_{\geq}c) \;\Big|\; a, b \in P,\ a\|b\Big\} \\
& \cup \Big\{(_{\leq}a \wedge {}_{\geq}b \to \bot) \;\Big|\; a, b \in P,\ a \prec b\Big\} \\
& \cup \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{a\in P} {}_{\geq}a \wedge {}_{\leq}a)\Big\}
\end{aligned}$$

Beispiel 21: Wir verwenden wieder die geordnete Menge aus Beispiel 19.

$\mathbb{I}_{\mathbf{P}} =$

	$_{\leq}a$	$_{\leq}b$	$_{\leq}c$	$_{\leq}d$	$_{\leq}e$	$_{\leq}f$	$_{\geq}a$	$_{\geq}b$	$_{\geq}c$	$_{\geq}d$	$_{\geq}e$	$_{\geq}f$
a	×		×	×	×	×	×					
b		×	×	×	×	×		×				
c			×		×	×	×	×	×			
d				×	×	×	×	×		×		
e					×		×	×	×	×	×	
f						×	×	×	×	×		×

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathbb{I}_{\mathbf{P}}} \;=\; & \{(_{\leq}a \to {}_{\leq}c, {}_{\leq}d),\ (_{\leq}b \to {}_{\leq}c, {}_{\leq}d),\ (_{\leq}c \to {}_{\leq}e, {}_{\leq}f),\ (_{\leq}d \to {}_{\leq}e, {}_{\leq}f), \\
& (_{\geq}c \to {}_{\geq}a, {}_{\geq}b),\ (_{\geq}d \to {}_{\geq}a, {}_{\geq}b),\ (_{\geq}e \to {}_{\geq}c, {}_{\geq}d),\ (_{\geq}f \to {}_{\geq}c, {}_{\geq}d), \\
& (_{\leq}a, {}_{\leq}b \to \bot),\ (_{\leq}c, {}_{\leq}d \to {}_{\leq}a \mid {}_{\leq}b),\ (_{\leq}e, {}_{\leq}f \to {}_{\leq}c \mid {}_{\leq}d), \\
& (_{\geq}a, {}_{\geq}b \to {}_{\geq}c \mid {}_{\geq}d),\ (_{\geq}c, {}_{\geq}d \to {}_{\geq}e \mid {}_{\geq}f),\ (_{\geq}e, {}_{\geq}f \to \bot), \\
& (_{\leq}a, {}_{\geq}c \to \bot),\ (_{\leq}a, {}_{\geq}d \to \bot),\ (_{\leq}b, {}_{\geq}c \to \bot),\ (_{\leq}b, {}_{\geq}d \to \bot), \\
& (_{\leq}c, {}_{\geq}e \to \bot),\ (_{\leq}c, {}_{\geq}f \to \bot),\ (_{\leq}d, {}_{\geq}e \to \bot),\ (_{\leq}d, {}_{\geq}f \to \bot), \\
& (\emptyset \to {}_{\leq}a, {}_{\geq}a \mid {}_{\leq}b, {}_{\geq}b \mid {}_{\leq}c, {}_{\geq}c \mid {}_{\leq}d, {}_{\geq}d \mid {}_{\leq}e, {}_{\geq}e \mid {}_{\leq}f, {}_{\geq}f)\}
\end{aligned}$$

Konvexordinale Skala. $\mathbb{C}_{\mathbf{P}} := (P, P, \not\geq) \mid (P, P, \not\leq)$.
Sei $M_a := \{_{\not\geq}b \mid b \in \min(P \setminus a\downarrow)\} \cup \{_{\not\leq}b \mid b \in \max(P \setminus a\uparrow)\}$.

$$\mathcal{L}^{\mathbb{C}_{\mathbf{P}}} \;=\; \Big\{(\emptyset \to \bigvee_{a\in P} \bigwedge M_a)\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
&\cup \left\{ (\gneqq a \to \bigwedge_{a \prec b} \gneqq b) \;\middle|\; a \in P \setminus \max(P) \right\} \\
&\cup \left\{ (\lneqq a \to \bigwedge_{a \succ b} \lneqq b) \;\middle|\; a \in P \setminus \min(P) \right\} \\
&\cup \left\{ (\bigwedge M_a \cup \{\gneqq a\} \to \bot) \;\middle|\; a \in P \right\} \\
&\cup \left\{ (\bigwedge M_a \cup \{\lneqq a\} \to \bot) \;\middle|\; a \in P \right\}
\end{aligned}
$$

Beispiel 22: Wieder wird die geordnete Menge aus Beispiel 19 verwendet.

$\mathbb{C}_{\mathbf{P}}$ =

	$\gneqq a$	$\gneqq b$	$\gneqq c$	$\gneqq d$	$\gneqq e$	$\gneqq f$	$\lneqq a$	$\lneqq b$	$\lneqq c$	$\lneqq d$	$\lneqq e$	$\lneqq f$
a		×	×	×	×	×		×				
b	×		×	×	×	×	×					
c				×	×	×	×	×		×		
d			×		×	×	×	×	×			
e						×	×	×	×	×		×
f					×		×	×	×	×	×	

Es ist dann $M_a := \{\gneqq b, \lneqq b\}$, $M_b := \{\gneqq a, \lneqq a\}$, $M_c := \{\gneqq d, \lneqq d\}$, $M_d := \{\gneqq c, \lneqq c\}$, $M_e := \{\gneqq f, \lneqq f\}$, $M_f := \{\gneqq e, \lneqq e\}$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathbb{C}_{\mathbf{P}}} \;=\; &\{(\emptyset \to \gneqq b, \lneqq b \mid \gneqq a, \lneqq a \mid \gneqq d, \lneqq d \mid \gneqq c, \lneqq c \mid \gneqq e, \lneqq e \mid \gneqq f, \lneqq f), \\
&(\gneqq a \to \gneqq c, \gneqq d),\ (\gneqq b \to \gneqq c, \gneqq d),\ (\gneqq c \to \gneqq e, \gneqq f),\ (\gneqq d \to \gneqq e, \gneqq f), \\
&(\lneqq c \to \lneqq a, \lneqq b),\ (\lneqq d \to \lneqq a, \lneqq b),\ (\lneqq e \to \lneqq c, \lneqq d),\ (\lneqq f \to \lneqq c, \lneqq d), \\
&(\gneqq b, \lneqq b, \gneqq a \to \bot),\ (\gneqq a, \lneqq a, \gneqq b \to \bot),\ (\gneqq d, \lneqq d, \gneqq c \to \bot), \\
&(\gneqq c, \lneqq c, \gneqq d \to \bot),\ (\gneqq f, \lneqq f, \gneqq e \to \bot),\ (\gneqq e, \lneqq e, \gneqq f \to \bot), \\
&(\gneqq b, \lneqq b, \lneqq a \to \bot),\ (\gneqq a, \lneqq a, \lneqq b \to \bot),\ (\gneqq d, \lneqq d, \lneqq c \to \bot), \\
&(\gneqq c, \lneqq c, \lneqq d \to \bot),\ (\gneqq f, \lneqq f, \lneqq e \to \bot),\ (\gneqq e, \lneqq e, \lneqq f \to \bot)\}
\end{aligned}
$$

18 Ein umfangreicheres Beispiel

Hier sollen an Hand eines größeren Beispiels noch einmal einige Verwendungsmöglichkeiten kumulierter Klauseln für die Formale Begriffsanalyse demonstriert werden. So kommen z.B. Skalierungen mit kumulierten Klauseln, ableitbare Merkmale und die Arbeit mit eingeschränkten Merkmalsmengen zu Einsatz. Die Daten und Skalierungen wurden aus einem Beispiel in [P97] übernommen und basieren auf einem Ausrüstungskatalog für Camping- und Wanderbedarf [KF96].

Die Algorithmen aus Abschnitt 13 wurden in der Programmiersprache $C++$ implementiert und für die Berechnungen verwendet. Trotz der relativ großen Merkmalsmenge und einer großzügigen Programmierung war die Laufzeit erstaunlich gering.

Beispiel 23: Wir betrachten den mehrwertigen Kontext *Schlafsäcke* der Abbildung 1. Seine Gegenstände sind Schlafsäcke unter 1,85 m Länge, denen durch die

$\mathbb{K}$	Hersteller H	Temperatur T	Gewicht G	Preis P	Füllmaterial F
One Kilo Bag	Wolfskin	7° C	940 g	149,-	Liteloft
Sund	Kodiac	3° C	1880 g	139,-	Hohlfaser
Kompact Basic	Ajungilak	0° C	1280 g	249,-	MTI Loft
Finmark Tour	Finmark	0° C	1750 g	179,-	Hohlfaser
Interlight Lyx	Caravan	0° C	1900 g	239,-	Termolite
Kompakt	Ajungilak	-3° C	1490 g	299,-	MTI Loft
Touch the cloud	Wolfskin	-3° C	1550 g	299,-	Liteloft
Cat's Meow	The North Face	-7° C	1450 g	339,-	Polarguard
Igloo Super	Ajungilak	-7° C	2060 g	279,-	Terraloft
Donna	Ajungilak	-7° C	1850 g	349,-	MTI Loft
Tyin	Ajungilak	-15° C	2100 g	399,-	Ultraloft
Travellers Dream	Yeti	3° C	970 g	379,-	Gänsedaune
Yeti light	Yeti	3° C	800 g	349,-	Gänsedaune
Climber	Finmark	-3° C	1690 g	329,-	Entendaune
Viking	Warmpeace	-3° C	1200 g	369,-	Gänsedaune
Eiger	Yeti	-3° C	1500 g	419,-	Gänsedaune
Climber light	Finmark	-7° C	1380 g	349,-	Gänsedaune
Cobra	Ajungilak	-7° C	1460 g	449,-	Entendaune
Cobra Comfort	Ajungilak	-10° C	1820 g	549,-	Entendaune
Foxfire	The North Face	-10° C	1390 g	669,-	Gänsedaune
Mont Blanc	Yeti	-15° C	1800 g	549,-	Gänsedaune

Abbildung 1: Kontext Schlafsäcke

mehrwertigen Merkmale Hersteller H, minimale Komforttemperatur (kurz Temperatur T), Gewicht G, Preis P und Füllmaterial F bestimmte Ausprägungen zugeordnet werden.

Zunächst wird der Kontext skaliert:

Hersteller:
Auf dieses Merkmal soll im folgenden verzichten werden, schließlich wollen wir keine Firmen bewerten.

Temperatur:
Die minimale Komforttemperatur wird in 4 Klassen eingestuft, welche nominal

skaliert werden:

$\mathbb{K}_T$	$T_{1..7}$	$T_{-6..0}$	$T_{-14..-7}$	T_{-15}
$0°C < T \leq 7°C$	$\times$			
$-7°C < T \leq 0°C$		$\times$		
$-15°C < T \leq -7°C$			$\times$	
$T \leq -15°C$				$\times$

Dieser Skalenkontext wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbb{K}_T} = & \{(\emptyset \to T_{1..7} \mid T_{-6..0} \mid T_{-14..-7} \mid T_{-15}), \\ & (T_{1..7}, T_{-6..0} \to \perp),\ (T_{1..7}, T_{-14..-7} \to \perp),\ (T_{1..7}, T_{-15} \to \perp), \\ & (T_{-6..0}, T_{-14..-7} \to \perp),\ (T_{-6..0}, T_{-15} \to \perp),\ (T_{-14..-7}, T_{-15} \to \perp)\} \end{aligned}$$

Gewicht:
Das Gewicht wird in 5 Klassen eingeteilt und interordinal skaliert:

$\mathbb{K}_G$	$G_{\leq 1000}$	$G_{\leq 1400}$	$G_{\leq 1700}$	$G_{\leq 2000}$	$G_{>1000}$	$G_{>1400}$	$G_{>1700}$	$G_{>2000}$
$0\ g \leq G < 1000\ g$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				
$1000\ g \leq G < 1400\ g$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			
$1400\ g \leq G < 1700\ g$			$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$1700\ g \leq G < 2000\ g$				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	
$2000\ g \leq G$					$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Dieser Skalenkontext wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbb{K}_G} = & \{(\emptyset \to G_{\leq 1000} \mid G_{\leq 1400}, G_{>1000} \mid G_{\leq 1700}, G_{>1400} \\ & \mid\ G_{\leq 2000}, G_{>1700} \mid G_{>2000}), \\ & (G_{\leq 1000} \to G_{\leq 1400}),\ (G_{\leq 1400} \to G_{\leq 1700}),\ (G_{\leq 1700} \to G_{\leq 2000}), \\ & (G_{>1400} \to G_{>1000}),\ (G_{>1700} \to G_{>1400}),\ (G_{>2000} \to G_{>1070}), \\ & (G_{\leq 1000}, G_{>1000} \to \perp),\ (G_{\leq 1400}, G_{>1400} \to \perp), \\ & (G_{\leq 1700}, G_{>1700} \to \perp),\ (G_{\leq 2000}, G_{>2000} \to \perp)\} \end{aligned}$$

Preis:
Es werden drei Preisgruppen unterschieden: billig, mittelteuer und teuer. diese sind nominal skaliert.

$\mathbb{K}_P$	billig	mittelteuer	teuer
0 DM $\leq P \leq 250$ DM	$\times$		
250 DM $< P \leq 400$ DM		$\times$	
400 DM $< P$			$\times$

Dieser Skalenkontext wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathbb{K}_P} = & \{(\emptyset \to \mathsf{billig} \mid \mathsf{mittelteuer} \mid \mathsf{teuer}), \\ & (\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer} \to \perp),\ (\mathsf{billig}, \mathsf{teuer} \to \perp), \\ & (\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer} \to \perp)\} \end{aligned}$$

Füllmaterial:
Auch das Füllmaterial wird in drei Gruppen unterschieden, diese werden nominal skaliert.

$\mathbb{K}_F$	F_{Faser}	F_{Loft}	F_{Daune}
Hohlfaser, Termolite, Polarguard	×		
Liteloft, MTI Loft, Terraloft, Ultraloft		×	
Entendaune, Gänsedaune			×

Dieser Skalenkontext wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathbb{K}_P} \quad = \quad & \{(\emptyset \to F_{\text{Faser}} \mid F_{\text{Loft}} \mid F_{\text{Daune}}),\ (F_{\text{Faser}}, F_{\text{Loft}} \to \bot), \\ & (F_{\text{Faser}}, F_{\text{Daune}} \to \bot),\ (F_{\text{Loft}}, F_{\text{Daune}} \to \bot)\}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir den skalierten Kontext $\mathbb{K}_{skal}$, der in der Abbildung 2 dargestellt ist (die einzelnen Skalenmerkmale im Tabellenkopf entsprechen denen der Skalenkontexte, dem ist es Autor einfach nicht mit LaTeX gelungen, die einzelnen Spalten ansprechend zu beschriften).

Gegenüber dem $\mathbb{K}$ enthält dieser Kontext eigentlich nur 18 verschiedene Gegenstände, die Ausprägungen der Schlafsäcke Finmmark Tour und Interlight Lyx sind gleich, ebenso für die Paare Kompakt - Touch the cloud und Travellers Dream - Yeti light. Für diesen Kontext erhält man als eine beschreibende Menge:

$$\mathcal{L}^{\mathbb{K}_{skal}} := \mathcal{L}^{\mathbb{K}_T} \cup \mathcal{L}^{\mathbb{K}_G} \cup \mathcal{L}^{\mathbb{K}_P} \cup \mathcal{L}^{\mathbb{K}_F} \cup \{\alpha_\emptyset^{\mathbb{K}_{skal}}\}\ ,$$

wobei

$$\alpha_\emptyset^{\mathbb{K}_{skal}} := (\emptyset \to \bigvee_{g \in G} \bigwedge g^{I_{skal}})\ ,$$

die kumulierte Klausel mit der leere Prämisse und den Ausprägungen der Gegenstände als Konklusionsmengen ist. Diese beschreibende Menge ist zugegebenermaßen nicht sehr informativ, wenn man sich für die Beziehungen der Merkmale interessiert, sie verdeutlicht aber die Stärke der beschreibenden Mengen der einzelnen Skalen.

Die Basis $\mathcal{B}^{\mathbb{K}_{skal}}$ hat übrigens 187 Elemente, im Gegensatz dazu enthält $\mathcal{L}^{\mathbb{K}_{skal}}$ lediglich 27 kumulierte Klauseln.

In [P97] werden nun mit Hilfe von Terminologien weitere Merkmale $M_A := \{\mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht}\}$ abgeleitet. Für das Beispiel und mit der oben angegebenen Skalierung können diese Merkmale auch aussagenlogisch beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathsf{Daune} \quad &:= \quad F_{\text{Daune}} \\ \mathsf{Kunstfaser} \quad &:= \quad F_{\text{Faser}} \vee F_{\text{Loft}} \\ \mathsf{gut} \quad &:= \quad (T_{1..7} \wedge G_{\leq 1000}) \vee (T_{-6..0} \wedge G_{\leq 1400}) \\ & \quad\ \ \vee (T_{-14..-7} \wedge G_{\leq 1700}) \vee (T_{-15} \wedge G_{\leq 2000})\end{aligned}$$

$\mathbb{K}_{skal}$	Temperatur T				Gewicht G								Preis P			Füllm. F		
One Kilo Bag	×				×	×	×	×					×				×	
Sund	×							×	×	×	×		×			×		
Kompact Basic		×				×	×	×	×				×				×	
Finmark Tour		×						×	×	×	×		×			×		
Interlight Lyx		×						×	×	×	×		×			×		
Kompakt		×					×	×	×	×				×			×	
Touch the cloud		×					×	×	×	×				×			×	
Cat's Meow			×				×	×	×	×				×		×		
Igloo Super			×						×	×	×	×		×			×	
Donna			×					×	×	×	×			×			×	
Tyin				×					×	×	×	×		×			×	
Travellers Dream	×				×	×	×	×						×				×
Yeti light	×				×	×	×	×						×				×
Climber		×					×	×	×	×				×				×
Viking		×				×	×	×	×					×				×
Eiger		×					×	×	×	×					×			×
Climber light			×			×	×	×	×					×				×
Cobra			×				×	×	×	×					×			×
Cobra Comfort			×					×	×	×	×				×			×
Foxfire			×			×	×	×	×						×			×
Mont Blanc				×				×	×	×	×				×			×

Abbildung 2: Der skalierte Kontext $\mathbb{K}_{skal}$

$$
\begin{aligned}
\textsf{akzeptabel} \;:=\; & (T_{1..7} \wedge G_{\leq 1400}) \vee (T_{-6..0} \wedge G_{\leq 1700}) \\
& \vee\; (T_{-14..-7} \wedge G_{\leq 2000}) \vee T_{-15} \\
\textsf{schlecht} \;:=\; & (T_{1..7} \wedge G_{>1400}) \vee (T_{-6..0} \wedge G_{>1700}) \\
& \vee\; (T_{-14..-7} \wedge G_{>2000})
\end{aligned}
$$

Die Merkmale **gut**, **akzeptabel** und **schlecht** leiten sich aus dem Verhältnis von minimaler Temperatur und Gewicht her: Je leichter ein Schlafsack ist, desto weniger ist er im allgemeinen für niedrige Temperaturen geeignet. Das Verhältnis von Gewicht und Temperatur wird dann als schlecht bezeichnet, wenn ein Schlafsack trotz hohen Gewichts nicht für niedrige Temperaturen geeignet ist. Dase wird in der Definition für **schlecht** einfach über die Skalenmerkmale ausgedrückt.

Wir geben jetzt für diese Merkmale ausreichende Mengen induzierender und rückwirkender kumulierter Klauseln an:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathsf{Daune}} &:= \{(F_{\text{Daune}} \to \mathsf{Daune}),\ (\mathsf{Daune} \to F_{\text{Daune}})\} \\
\mathcal{L}_{\mathsf{Kunstfaser}} &:= \{(F_{\text{Faser}} \to \mathsf{Kunstfaser}),\ (F_{\text{Loft}} \to \mathsf{Kunstfaser}), \\
&\quad (\mathsf{Kunstfaser} \to F_{\text{Faser}} \mid F_{\text{Loft}})\} \\
\mathcal{L}_{\mathsf{gut}} &:= \{(T_{1..7}, G_{\leq 1000} \to \mathsf{gut}),\ (T_{-6..0}, G_{\leq 1400} \to \mathsf{gut}), \\
&\quad (T_{-14..-7}, G_{\leq 1700} \to \mathsf{gut}),\ (T_{-15}, G_{\leq 2000} \to \mathsf{gut}), \\
&\quad (\mathsf{gut} \to T_{1..7}, G_{\leq 1000} \mid T_{-6..0}, G_{\leq 1400} \\
&\quad \mid\ T_{-14..-7}, G_{\leq 1700} \mid T_{-15}, G_{\leq 2000})\} \\
\mathcal{L}_{\mathsf{akzeptabel}} &:= \{(T_{1..7}, G {\leq}\ 1400 \to \mathsf{akzeptabel}), \\
&\quad (T_{-6..0}, G_{\leq 1700} \to \mathsf{akzeptabel}), \\
&\quad (T_{-14..-7}, G_{\leq 2000} \to \mathsf{akzeptabel}),\ (T_{-15} \to \mathsf{akzeptabel}), \\
&\quad (\mathsf{akzeptabel} \to T_{1..7}, G_{\leq 1400} \mid T_{-6..0}, G_{\leq 1700} \\
&\quad \mid\ T_{-14..-7}, G_{\leq 2000} \mid T_{-15})\} \\
\mathcal{L}_{\mathsf{schlecht}} &:= \{(T_{1..7}, G_{>1400} \to \mathsf{schlecht}),\ (T_{-6..0}, G_{>1700} \to \mathsf{schlecht}), \\
&\quad (T_{-14..-7}, G_{>2000} \to \mathsf{schlecht}), \\
&\quad (\mathsf{schlecht} \to T_{1..7}, G_{>1400} \mid T_{-6..0}, G_{>1700} \mid T_{-14..-7}, G_{>2000})\}
\end{aligned}
$$

Nach Satz 7 ist der dadurch mit den neuen Merkmalen M_A entstehende Kontext durch $\mathcal{L}^{\mathbb{K}_{skal}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{Daune}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{Kunstfaser}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{gut}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{akzeptabel}} \cup \mathcal{L}_{\mathsf{schlecht}}$ beschrieben. Daher können wir eine erzeugende Menge für die Theorie von $\mathbb{K}_{skal}$ über den Merkmalen $N := M_A \cup \{\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer}\}$ mit den Algorithmen aus Abschnitt 13 ermitteln. Man beachte, daß dies nur über die kumulierten Klauseln geschieht, die tatsächlichen Ausprägungen der ableitbaren Merkmale werden nicht verwendet.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{\mathbb{K}_{skal|N}} &:= \{(\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{schlecht} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot), \\
&\quad (\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot),\\
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel} \to \bot),\\
&(\mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht} \to \bot),\\
&(\emptyset \to \mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel},\\
&\mid\ \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht},\\
&\mid\ \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel},\\
&\mid\ \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel},\\
&\mid\ \mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht},\\
&\mid\ \mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel})\}
\end{aligned}
$$

Wenn man diese Menge betrachtet, bemerkt man, daß bei kumulierten Klauseln, die eine leere Konklusion haben, in den Prämissen jeweils zwei gegensätzliche Merkmale auftauchen (z.B. teuer und mittelteuer, gut und schlecht). Schaut man sich deshalb die Merkmale von N an, so sieht man rasch, daß es sich dabei um drei in gewisser Weise unabhängige Mengen $\mathcal{H}_P := \{\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer}\}$, $\mathcal{H}_F := \{\mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser}\}$ und $\mathcal{H}_Q := \{\mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht}\}$ handelt, deren innere Zusammenhänge durch kumulierte Klauseln beschrieben werden können:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_P &:= \{(\emptyset \to \mathsf{teuer} \mid \mathsf{mittelteuer} \mid \mathsf{billig}),\ (\mathsf{mittelteuer}, \mathsf{teuer} \to \bot),\\
&\qquad (\mathsf{billig}, \mathsf{teuer} \to \bot),\ (\mathsf{billig}, \mathsf{mittelteuer} \to \bot)\}\\
\mathcal{H}_F &:= \{(\mathsf{Daune}, \mathsf{Kunstfaser} \to \bot),\ (\emptyset \to \mathsf{Kunstfaser} \mid \mathsf{Daune})\}\\
\mathcal{H}_Q &:= \{(\mathsf{akzeptabel}, \mathsf{schlecht}, \to \bot),\ (\mathsf{gut}, \to \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel}),\\
&\qquad (\emptyset \to \mathsf{schlecht} \mid \mathsf{akzeptabel})\}
\end{aligned}
$$

Auch in diesem Fall reicht dann eine einzige exhaustive kumulierte Klausel, um diese Mengen zu einer beschreibenden Menge zu vervollständigen, nämlich

$$
\begin{aligned}
&(\emptyset \to \mathsf{teuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel} \mid \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht}\\
&\mid\ \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{akzeptabel} \mid \mathsf{mittelteuer}, \mathsf{Daune}, \mathsf{akzeptabel}\\
&\mid\ \mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{schlecht} \mid \mathsf{billig}, \mathsf{Kunstfaser}, \mathsf{gut}, \mathsf{akzeptabel})
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis führt zu zwei Schlüssen: Beim Arbeiten mit tatsächlichen Anwendungen, insbesondere bei der Merkmalsexploration über skalierten Kontexten, hat man es hauptsächlich mit kumulierten Hornklauseln zu tun, „echte“ kumulierte Klauseln treten eher in der Minderzahl auf.

Die zweite Feststellung ist folgende: Die ganzen Informationen des Kontextes, die in [P97] mit Hilfe der Terminologie aus dem Kontext herausgearbeitet wurden, sind entweder trivialer Weise schon in den Skalen enthaltem, z.B.

- Es gibt keine Schlafsäcke, die billig *und* teuer sind.
- Ein Schlafsack besteht *entweder* aus Kunstfaser *oder* Daune.
- Alle guten Schlafsäcke sind akzeptabel.

oder lassen sich aus der einzelnen obigen kumulierten Klausel ablesen, z.B.

- Alle Daunenschlafsäcke sind akzeptabel.
- Es gibt keine billigen Daunenschlafsäcke.
- Billige Kunstfaserschlafsäcke sind entweder gut oder schlecht (es gibt also keine „mittelmäßigen" Schlafsäcke dieser Art).

Literatur

[DG84] W. F. Dowling, J. H. Gallier: Linear time algorithms for testing the satisfiability of propositional Horn formulae, Journal of Logic Programming, **3** (1984), 267-284

[GW96] B. Ganter, R. Wille: Formale Begriffsanalyse, Springer Verlag, Berlin, 1996

[I95] B. Ganter, R. Krauße: IMPEX - Merkmalsexploration mit Exhaustionen im Hintergrundwissen, DOS-Programm, 1995

[KF96] Kleine Fluchten: Ausrüstungskatalog 1996 der Finmark-Gruppe, Würzburg 1996

[KL94] H. Kleine Bühning, T. Lettmann: Aussagenlogik: Deduktion und Algorithmen, Teubner Verlag, Stuttgart, 1994

[P97] S. Prediger: Terminologische Merkmalslogik in der Formalen Begriffsanalyse, Preprint Technische Hochschule Darmstadt. 1997

[W89] M. Wild: Implicational bases for finite closure systems, Preprint Technische Hochschule Darmstadt Nr. 1210, 1998

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die am heutigen Tag eingereichte Diplomarbeit zum Thema

Kumulierte Klauseln
als aussagenlogische Sprachmittel für die
Formale Begriffsanalyse

unter der Betreuung von Prof. Bernhard Ganter selbständig erarbeitet und verfaßt habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht verwendet.

Dresden, den 13. 7. 98 Rüdiger Krauße

Thesen der Diplomarbeit

Thema: Kumulierte Klauseln als aussagenlogische Sprachmittel für die Formale Begriffsanalyse

vorgelegt von: Rüdiger Krauße
Dresden, den 13. 7. 1998

- Die kumulierten Klauseln bilden eine Klasse von aussagenlogischen Termen, die einerseits Mengensysteme vollständig charakterisieren, andererseits sehr anschaulich sind und somit besonders geeignet für Anwendungen, mit denen hauptsächlich Nicht-Mathematiker arbeiten. Insbesondere zählt dazu die Merkmalsexploration der Formalen Begriffsanalyse.

- Der syntaktische Ableitungsbegriff ermöglicht die informationsverlustfreie Reduzierung von Mengen kumulierter Klauseln. Unter bestimmten Gesichtspunkten sind dabei verschiedene solcherart reduzierter Mengen zu bevorzugen: Schlichte Mengen, wenn vorhandene Erzeugendensysteme verwendet werden sollen, bzw. die Basis $\mathcal{B}$ auf Grundlage der Pseudomodelle, wenn nur die Modellklasse bekannt ist, bzw. transitivitätsvermeidende Mengen, die in den Berechnungen mit kumulierten Klauseln gute Komplexitätseigenschaften haben.

- Die kumulierten Hornklauseln bilden eine gut zu handhabene Unterklasse der kumulierten Klauseln. Auch sie zeichnen sich dadurch aus, daß es für sie Algorithmen mit geringem Aufwand gibt.

- Trotz dem die Berechenbarkeitsprobleme mit kumulierten Klauseln in *NP* und *coNP* liegen, hat man es in Anwendungen meist mit polynomialen Spezialfällen zu tun.

- Die kumulierten Klauseln lassen sich gut zur Beschreibung der Gegenstandsinhalte von formalen Kontexten verwenden. Sie sind im Vergleich zu Implikationen sogar besser geeignet, komliziertere und weitergehendere Sachverhalte in Kontexten darzustellen.

- In diesem Sinne wurden in der vorliegenden Arbeit auch eine Reihe von Algorithmen vorgestellt, die direkt bei der Merkmalsexploration der Formalen Begriffsanalyse Verwendung finden können.